

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.



Tesi di Laurea Specialistica in Matematica

**ÉLÉMENTS DE PREUVE DE LA CONJECTURE DE  
FONTAINE-MAZUR D'APRÈS KISIN**

**Marco De Ieso**

RELATORI

**Prof. Christophe Breuil**  
CNRS et IHES

**Prof. Marco Andrea Garuti**  
Università di Padova

Anno Accademico 2008–2009



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
2.1	Notations . . . . .	5
2.2	Induite compacte et opérateurs de Hecke . . . . .	5
2.3	Classification des poids pour $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ . . . . .	7
2.4	L'arbre de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . . . . .	9
2.5	Anneaux des périodes . . . . .	10
2.5.1	Les anneaux $\mathbb{B}_{dR}^+$ et $\mathbb{B}_{dR}$ . . . . .	10
2.5.2	$\mathbb{A}_{cris}$ , $\mathbb{B}_{cris}^+$ et $\mathbb{B}_{cris}$ . . . . .	13
2.5.3	Les anneaux $\mathbb{B}_{st}^+$ et $\mathbb{B}_{st}$ . . . . .	15
2.6	Représentations $p$ -adiques Semi-Stables . . . . .	16
2.7	Le Foncteur $\mathcal{V}$ de Colmez . . . . .	18
<b>3</b>	<b>La Conjecture de Breuil-Mézard</b>	<b>25</b>
3.1	Polynômes de Hilbert-Samuel et multiplicités . . . . .	25
3.1.1	Modules gradués et application de Hilbert . . . . .	25
3.1.2	Application de Samuel . . . . .	29
3.1.3	Systèmes de Paramètres et Multiplicité . . . . .	31
3.1.4	Une variante de la multiplicité de Hilbert-Samuel . . . . .	32
3.2	Théorie des déformations de Mazur . . . . .	35
3.2.1	Le résultat principal . . . . .	35
3.3	La multiplicité galoisienne . . . . .	40
3.4	La multiplicité automorphe . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Représentations de <math>GL_2(\mathbb{Q}_p)</math> en caractéristique <math>p</math></b>	<b>47</b>
<b>5</b>	<b>Un énoncé local</b>	<b>55</b>
5.1	Représentations et Pseudo-représentations . . . . .	55
5.2	Une grosse représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ . . . . .	58

5.3	Preuve de l' Inégalité . . . . .	61
5.3.1	Première majoration . . . . .	61
5.3.2	Deuxième majoration . . . . .	64
5.3.3	Fin de la preuve . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Vecteurs de Witt</b>	<b>71</b>
A.0.4	Les applications $\mathcal{V}$ , $r$ et $\varphi$ . . . . .	72

# Chapitre 1

## Introduction

Dans [21], Fontaine et Mazur ont fait la conjecture suivante :

**Conjecture 1.0.1. (*Fontaine-Mazur*)** : Soit  $F$  un corps de nombres. Une représentation  $p$ -adique irréductible de  $G_F$  est géométrique si et seulement si elle est isomorphe à un sous-quotient de  $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p(r)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$  où  $i, r \in \mathbb{Z}$  et  $X$  est un schéma propre et lisse sur  $F$ .

Un cas particulier de cette conjecture est aussi connu sous le nom de conjecture de Fontaine-Mazur :

**Conjecture 1.0.2. (*Fontaine-Mazur*)'** : Soit  $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_2(E)$  une représentation irréductible géométrique qui n'est pas une torsion à la Tate d'une représentation paire de  $G_{\mathbb{Q}}$  se factorisant par une extension finie de  $\mathbb{Q}$ . Alors  $\rho \simeq \rho_f(r)$  où  $f$  est une forme modulaire parabolique et  $r \in \mathbb{Z}$ .

La première approche de la conjecture de Fontaine-Mazur a été donnée par Wiles et Taylor [37], [36]. Ils ont montré comment déduire la modularité d'une certaine classe de représentations galoisiennes  $p$ -adiques à partir de la connaissance de la modularité de leur réduction modulo  $p$ . Ensuite, d'autres arithméticiens ont établi des théorèmes de relèvement de modularité pour les représentations potentiellement Barsotti-Tate et, plus généralement, des représentations de poids de Hodge-Tate petits [16], [15],[8]. Un point crucial de ces articles est que pour prouver un théorème de relèvement de modularité, il suffit de montrer qu'un certain anneau local de déformation est formellement lisse. Dans [8] Breuil, Conrad, Diamond et Taylor ont considéré des représentations potentiellement Barsotti-Tate et ils ont énoncé une conjecture qui prédit quand l'anneau de déformation local associé est formellement lisse. Cette conjecture a été généralisée par Breuil et Mézard dans [10]. Rappelons brièvement son énoncé. Considérons les données suivantes :

- i.  $k$  est un entier  $\geq 2$ ;

- ii.  $\tau : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$  est une représentation de noyau ouvert qui s'étend à  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  (où  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})$  est le sous-groupe d'inertie) ;
- iii.  $\bar{\rho}_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  est une représentation de noyau ouvert satisfaisant  $\text{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)]}(\bar{\rho}_p) = \overline{\mathbb{F}}_p$ .

Soit  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers d'une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  tel que  $\tau$  soit à valeurs dans  $\text{GL}_2(\mathcal{O})$  et  $\bar{\rho}_p$  à valeurs dans  $\text{GL}_2(\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}})$ . Mazur a montré qu'il existe une  $\mathcal{O}$ -algèbre locale noethérienne complète  $R(\bar{\rho}_p)$  de corps résiduel  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$  et une représentation continue  $\rho_p^{\text{univ}} : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_2(R(\bar{\rho}_p))$  se réduisant modulo l'idéal maximal de  $R(\bar{\rho}_p)$  sur  $\bar{\rho}_p$  et possédant la propriété d'être une déformation universelle de  $\bar{\rho}$ . On montrera ce résultat de Mazur dans la section 3.2 en suivant [17].

Dans l'article [10], Breuil et Mézard ont conjecturé (pour  $k < p$ ) que les déformations de type  $(k, \tau, \psi)$  sont paramétrées par un quotient  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  de  $R(\bar{\rho})$  puis ils ont conjecturé la "taille" de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ . Notons  $\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho})$  la multiplicité de Hilbert-Samuel de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes \mathcal{O}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$ . L'idée est que l'entier  $\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho})$ , purement galoisien, peut être prédit par l'étude de certaines représentations  $p$ -adiques de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ . Plus précisément, dans l'appendice à [10], Henniart montre que l'on peut toujours associer à  $\tau$  une unique représentation d'image finie  $\sigma(\tau)$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  (sur  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ) caractérisée par le fait suivant : si  $\pi$  est une représentation lisse irréductible de dimension infinie de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  telle que la restriction à l'inertie de la représentation de Weil-Deligne associée à  $\pi$  par la correspondance locale de Langlands est isomorphe à  $\tau$ , alors  $\pi$  contient  $\sigma(\tau)$  (lorsque l'on restreint  $\pi$  à  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ). On définit alors la représentation  $p$ -adique de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  suivante :

$$\sigma(k, \tau) := \sigma(\tau) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \text{Sym}^{k-2}(\overline{\mathbb{Q}}_p^2).$$

Il s'agit d'une représentation de dimension finie de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ , donc elle contient un  $\mathcal{O}$ -réseau  $L_{k,\tau}$ , stable sous l'action de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ . On a :

$$(L_{k,\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F})^{\text{ss}} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{n,m} \sigma_{n,m}^{a(n,m)}$$

où  $\sigma_{n,m} = \text{Sym}^n \mathbb{F}^2 \otimes \det^m$  avec  $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  et  $m \in \{0, 1, \dots, p-2\}$ . On pose

$$\mu_{\text{aut}} = \mu_{\text{aut}}(k, \tau, \bar{\rho}) := \sum_{n,m} a(n, m) \mu_{m,n}(\bar{\rho})$$

où  $\mu_{(n,m)}(\bar{\rho})$  est un entier positif bien défini.

La conjecture de Breuil-Mézard s'énonce alors ainsi :

**Conjecture 1.0.3. (Breuil-Mézard-Kisin)**  $\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho}) = \mu_{\text{aut}}(k, \tau, \bar{\rho})$ .

Dans [26], Kisin a montré que l'égalité est vraie lorsque l'hypothèse suivante est satisfaite :

**Hypothèse 1.0.4.** Soit  $E'$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Soit  $V$  un  $E'$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une action continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . Supposons que  $V$  soit potentiellement semi-stable de type  $(k, \tau, \psi)$ . Il existe un  $\mathcal{O}_{E'}$ -réseau admissible  $\Pi$  à caractère central  $\psi$  tel que  $\mathcal{V}(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E' \xrightarrow{\sim} V$  et tel que  $\sigma(k, \tau) \hookrightarrow \Pi \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  soit une inclusion  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -équivariante.

Dans ce travail on se propose de montrer le théorème suivant, qui établit une inégalité entre les deux multiplicités précédemment introduites.

**Théorème 1.0.5.** Soit  $k$  un entier  $\geq 2$  et  $\omega$  le caractère cyclotomique modulo  $p$ . Soit  $\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  un type galoisien et  $\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow O^\times$  un caractère continu tel que  $\psi \chi_{\mathrm{cyc}}^{2-k} |_{I_{\mathbb{Q}_p}} \sim \det \tau$ .

Supposons que

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$$

est soit absolument irréductible soit une extension non triviale de  $\omega_2$  par  $\omega_1$ , où  $\omega_1, \omega_2 : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}^\times$  sont des caractères distincts avec  $\omega_1 \neq \omega\omega_2$ .

Alors :

$$\mu_{\mathrm{gal}}(k, \tau, \bar{\rho}) \leq \mu_{\mathrm{aut}}(k, \tau, \bar{\rho}).$$

L'idée est de construire à partir de l'induite compacte  $\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma(k, \tau)$  une "grosse" représentation de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sur laquelle  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  agit via les coefficients. Cette représentation fera le lien entre  $\mu_{\mathrm{aut}}(k, \tau, \bar{\rho})$  (liée à  $\sigma(k, \tau)$ ) et  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes \mathbb{F}$ .

## Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de mémoire, Christophe Breuil, qui m'a proposé un sujet très passionnant et m'a donné la possibilité de prendre part au groupe de travail donné à l'I.H.E.S. sur la conjecture de Fontaine-Mazur.

Je dois beaucoup à Yongquan, Ramla, Arno et Shen pour m'avoir toujours donné les clés pour bien comprendre des questions que je n'étais pas capable de résoudre et pour leur soutien constant.

Je tiens à remercier chaleureusement Stephane Fischler qui a été mon Tuteur à Orsay. Il a toujours eu beaucoup d'attention et d'intérêt pour mes études et m'a donné des conseils très utiles et importants pendant une période cruciale de mon expérience universitaire. Je lui en suis très reconnaissant.

Ma passion pour la théorie des nombres trouve son origine lors de ma deuxième année à l'université de Padoue. J'ai eu la chance de suivre les cours d'algèbre et théorie de Galois donnés par Federico Menegazzo qui a ensuite accepté de devenir mon directeur de mémoire de licence. Il m'a suivi avec attention et patience.

Je souhaite aussi remercier les professeurs dont j'ai suivi les cours cette année : Jean-Marc Fontaine, David Harari, Pierre Colmez et Yves Laszlo.

Un ricordo speciale lo dedico a tutti gli amici che mi hanno accompagnato in questi cinque anni universitari indimenticabili, e a quelli conosciuti durante il soggiorno a Parigi. I momenti speciali e le emozioni che mi hanno regalato costituiscono un privilegio unico e indelebile nella mia esperienza di vita.

Infine la mia famiglia e in particolare i miei genitori, Ugo e Marisa ai quali dedico questa tesi, e i miei fratelli, Nicola e Marianna, per l'affetto che non è mai mancato.

# Chapitre 2

## Préliminaires

### 2.1 Notations

Nous adopterons les notations suivantes :

Dans tout le rapport,  $p$  est un nombre premier impair. On fixe  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ . On note  $G_{\mathbb{Q}_p}$  le groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}_p$  et  $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$  le groupe de Weil. On note  $I_{\mathbb{Q}_p} \subset G_{\mathbb{Q}_p}$  le sous-groupe d'inertie et  $I_{\mathbb{Q}_p}^{\text{sauv}}$  le sous-groupe d'inertie sauvage. Soit  $\chi_{\text{cyc}} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  le caractère cyclotomique  $p$ -adique.

On note  $\overline{\mathbb{Z}}_p$  l'anneau des entiers de  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  et  $\overline{\mathbb{F}}_p$  le corps résiduel de  $\overline{\mathbb{Z}}_p$ . On fixe  $\mathbb{F}$  une extension finie de  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . On fixe aussi une extension finie totalement ramifiée  $E/W(\mathbb{F})[1/p]$  d'anneau des entiers  $\mathcal{O}$  dont on choisit une uniformisante  $\pi \in \mathcal{O}$ , et un caractère continu  $\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathcal{O}^\times$ . Pour  $E'/E$  extension finie de  $E$ , on note  $\mathcal{O}_{E'}$  l'anneau des entiers de  $E'$  et  $\pi_{E'}$  une uniformisante de  $E'$ . On normalise les isomorphismes de la théorie du corps de classes local de telle sorte que les Frobenius arithmétiques s'envoient sur les inverses des uniformisantes.

On note  $G = \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ,  $K = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ,  $K_1 = \text{Id} + pM_2(\mathbb{Z}_p)$  et  $Z$  le centre de  $G$  que l'on identifie à  $\mathbb{Q}_p^\times$ . On note aussi  $I \subset \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  le sous-groupe d'Iwahori de  $G$ , composé des matrices dont la réduction modulo  $p$  est triangulaire supérieure.

### 2.2 Induite compacte et opérateurs de Hecke

Soient  $H$  un sous-groupe ouvert et compact modulo  $Z$  de  $G$  et  $\sigma$  une représentation lisse de  $H$  sur un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $V_\sigma$  de dimension finie. On considère la représentation  $\text{ind}_H^G \sigma$ , qui est le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel des fonctions

$$f : G \rightarrow V_\sigma$$

localement constantes, à support compact modulo  $H$  et telles que  $f(hg) = \sigma(h)(f(g))$  ( $h \in H, g \in G$ ) sur lequel  $G$  agit par  $(g'f)(g) := f(gg')$ . Pour  $g \in G$  et  $v \in V_\sigma$ , on note  $[g, v] : G \rightarrow V_\sigma$  l'élément de  $\text{ind}_H^G \sigma$  qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} [g, v](g') \cdot v &= \sigma(g'g) \text{ si } g' \in Hg^{-1} \\ [g, v](g') &= 0 \text{ si } g' \in Hg^{-1}. \end{aligned}$$

Autrement dit,  $[g, v]$  est l'unique élément de  $\text{ind}_H^G \sigma$  à support sur  $Hg^{-1}$  tel que  $[g, v](g^{-1}) = v$ . On a  $g([g', v]) = [gg', v]$  et si  $h \in H$ ,  $[gh, v] = [g, \sigma(h)v]$ .

**Lemme 2.2.1.** *Si  $f$  est un élément de  $\text{ind}_H^G \sigma$ , on peut l'écrire sous la forme  $f = \sum_{i \in I} [g_i, v_i]$  où  $I$  est un ensemble fini,  $g_i \in G$  et  $v_i \in V_\sigma$ .*

*Démonstration.* Comme le support d'un tel élément  $f$  est compact modulo  $H$ , c'est une union finie de classes à droite disjointes  $Hg_i^{-1}$ . Il suffit donc de poser  $v_i := f(g_i^{-1})$ .  $\square$

**Lemme 2.2.2.** *(Réciprocité compacte de Frobenius). Soit  $\pi$  une représentation lisse de  $G$  sur  $\mathbb{F}$ . Alors :*

$$\text{Hom}_G(\text{ind}_H^G \sigma, \pi) = \text{Hom}_H(\sigma, \pi|_H).$$

*Démonstration.* L'image de  $\Phi \in \text{Hom}_G(\text{ind}_H^G \sigma, \pi)$  est donnée par  $v \mapsto \Phi([1_H, v])$  si  $v \in V_\sigma$ . L'image de  $\phi \in \text{Hom}_H(\sigma, \pi|_H)$  est donnée par  $\Phi : [g, v] \mapsto g(\phi(v))$  ( $g \in G, v \in V_\sigma$ ).  $\Phi$  est uniquement déterminée par le Lemme 2.2.1.  $\square$

**Définition 2.2.3.** *L'algèbre de Hecke de  $\text{ind}_H^G \sigma$  est :*

$$\mathcal{H}(H, \sigma) := \text{End}_G(\text{ind}_H^G \sigma).$$

C'est une algèbre pour l'addition et la composition des endomorphismes. Elle n'est pas commutative en général.

**Lemme 2.2.4.** *(a) Le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $\mathcal{H}(H, \sigma)$  est naturellement isomorphe au  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $\mathcal{H}_H(\sigma)$  des fonctions  $\varphi : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}} V_\sigma$  à support compact modulo  $H$  telles que :*

$$\varphi(h_1gh_2) = \sigma(h_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(h_2)$$

*pour tous  $h_1, h_2 \in H$  et  $g \in G$ . Si l'on note  $T_\varphi$  l'opérateur correspondant à la fonction  $\varphi$ , on obtient de manière explicite que pour tous  $g \in G$  et  $f \in \text{ind}_H^G \sigma$  :*

$$T_\varphi(f)(g) = \sum_{g'H \in G/H} \varphi(g')f(g'^{-1}g).$$

*(b) En particulier, l'action de  $T_\varphi$  sur  $[g, v] \in \text{ind}_H^G \sigma$  est donnée par la formule suivante :*

$$T_\varphi([g, v]) = \sum_{g'H \in G/H} [gg', \varphi(g'^{-1})(v)].$$

(c) Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  deux fonctions dans  $\mathcal{H}_H(\sigma)$ . Alors  $T_{\varphi_2} \circ T_{\varphi_1} = T_{\varphi_2 * \varphi_1}$ , où

$$\varphi_2 * \varphi_1(g) := \left( v \mapsto \sum_{y \in G/H} (\varphi_1(y) \circ \varphi_2(y^{-1}g))(v) \right).$$

*Démonstration.* (a) Par le Lemme de réciprocity compacte de Frobenius on a  $\mathcal{H}(H, \sigma) = \mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{ind}_H^G \sigma|_H)$ . On associe à  $\varphi$  l'opérateur  $T_\varphi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{ind}_H^G \sigma|_H)$  défini par la formule suivante :

$$T_\varphi(v) := (g \mapsto \varphi(g)(v)), \text{ pour tous } g \in G, v \in V_\sigma.$$

On associe à  $T \in \mathrm{Hom}_H(\sigma, \mathrm{ind}_H^G \sigma|_H)$  la fonction  $\varphi_T$  définie par

$$\varphi_T(g) := (v \mapsto \varphi T(v)(g)), \text{ pour tous } g \in G, v \in V_\sigma.$$

La deuxième partie de l'énoncé est immédiate en utilisant la construction explicite de la bijection du Lemme 2.2.2.

(b) Découle du (a) et du Lemme 2.2.1.

(c) On constate que  $\varphi_1 * \varphi_2 \in \mathcal{H}_H(\sigma)$ . On applique deux fois la formule du (a) :

$$\begin{aligned} T_{\varphi_2} \circ T_{\varphi_1}(f)(g) &= \sum_{y \in G/H} \varphi_2(y) \sum_{x \in G/H} \varphi_1(x) f(x^{-1}y^{-1}g) \\ &= \sum_{y \in G/H} \sum_{z \in G/H} \varphi_2(y) \varphi_1(y^{-1}z) f(z^{-1}g) \\ &= \sum_{z \in G/H} (\varphi_2 * \varphi_1) f(z^{-1}g) \\ &= T_{\varphi_2 * \varphi_1}(f)(g). \end{aligned}$$

□

## 2.3 Classification des poids pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$

Dans cette section, on notera  $\Gamma := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  le groupe des matrices inversibles à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , et on fixe un plongement de  $\mathbb{F}_p$  dans  $\mathbb{F}$ .

**Définition 2.3.1.** *Un poids pour  $K$  est une représentation lisse, continue et irréductible de  $K$  sur  $\mathbb{F}$ .*

Le lemme suivant permet de ramener l'étude des poids à l'étude des représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ . Commençons par un résultat classique de la théorie des groupes :

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $p^n$  et soit  $V$  un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel non nul sur lequel  $G$  agit. Alors  $V^G \neq 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ , et soit  $W \subset V$  le sous  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel non nul engendré par  $\{gx, g \in G\}$ .  $G$  étant fini,  $W$  est un ensemble fini de cardinal  $p^m$  avec  $m > 0$ . Comme  $G$  agit sur le groupe additif  $W$ , on a  $W = \coprod_i Gw_i$  pour un ensemble fini  $\{w_i\}$  d'éléments de  $W$ . On a  $|Gw_i| = p^{n_i}$  pour tout  $i$ , avec  $n_i = 0$  si et seulement si  $w_i \in W^G$ , donc  $p^m = |W| = pc + |W^G|$  où  $c$  est un entier. La condition  $m > 0$  implique que  $p$  divise  $|W^G|$ , et comme  $W^G \neq \emptyset$ , on obtient  $|W^G| > 1$  : il existe  $y \in V$ ,  $y \neq 0$  tel que  $y \in W^G \subset V^G$ .  $\square$

**Lemme 2.3.3.** *Tout poids est trivial sur  $K_1$ . Par conséquent, tout poids se factorise à travers  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  un poids. Par hypothèse de continuité,  $\sigma$  est trivial sur un sous-groupe ouvert  $U$  de  $K$ . Comme  $K_1$  est un pro- $p$ -groupe,  $K_1/U \cap K_1$  est un  $p$ -groupe, donc le Lemme 2.3.2 assure que l'espace des invariants sous ce quotient est non nul. Comme l'espace des  $K_1$ -invariants est stable par  $K$ , on peut conclure que  $\sigma$  est trivial sur  $K_1$  grâce à l'irréductibilité de  $\sigma$ . La deuxième partie suit de l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \longrightarrow K_1 \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

$\square$

**Définition 2.3.4.** *Si  $r \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}^2)$  la représentation de dimension  $r + 1$  de  $\Gamma$  définie par l'action naturelle de  $\Gamma$  sur la base canonique de  $\mathbb{F}^2$ .*

La représentation  $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}^2)$  s'identifie à la représentation d'espace sous-jacent  $\bigoplus_{i=0}^r \mathbb{F}x^{r-i}y^i$  sur lequel  $\Gamma$  agit par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x^{r-i}y^i := (ax + cy)^{r-i}(bx + dy)^i$$

On a alors une description exhaustive des représentations irréductibles de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{F}$  (cf. [1, Proposition 1]) :

**Théorème 2.3.5.** *Les représentations  $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}^2) \otimes (\det)^m$  avec  $0 \leq r \leq p - 1$  et  $0 \leq m < p - 1$  décrivent, à isomorphisme près, toutes les représentations irréductibles de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{F}$ .*

Grâce au Lemme 2.3.3 on a donc une description explicite des poids de  $K$  :

**Corollaire 2.3.6.** *Tout poids est, à isomorphisme près, de la forme  $\mathrm{Sym}^r(\mathbb{F}^2) \otimes \det^m$  avec  $0 \leq r \leq p - 1$  et  $0 \leq m < p - 1$ .*

## 2.4 L'arbre de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$

Soit  $\mathcal{T}$  l'arbre de Bruhat-Tits de  $\mathbb{Q}_p^2$ . Rappelons qu'il s'agit de l'arbre dont les sommets sont les classes d'homothétie des  $\mathbb{Z}_p$ -réseaux de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , et qu'il existe une arête entre deux classes  $[L_0]$  et  $[L_1]$  si elles ont des représentants  $L_0$  et  $L_1$  tels que

$$pL_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_0.$$

Dans la suite, on pose  $s_0 = [\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p]$ . On note  $S(\mathcal{T})$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$  et  $A(\mathcal{T})$  l'ensemble de ses arêtes orientées. Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux sommets de l'arbre reliés par une arête, on note  $(\sigma, \sigma')$  l'arête orientée d'origine  $\sigma$  et de but  $\sigma'$ .

L'action de  $G$  sur  $S(\mathcal{T})$  et  $A(\mathcal{T})$  est transitive. Le stabilisateur de  $s_0$  est  $KZ$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$  on note  $s_n = \alpha^n s_0$ , où  $\alpha$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ . Les arêtes orientées fixées par  $I$  sont  $(s_0, s_1)$  et  $(s_1, s_0)$ . On a aussi des isomorphismes de  $G$ -ensembles :

$$S(\mathcal{T}) = Gs_0 \simeq G/KZ \text{ et } A(\mathcal{T}) = G(s_0, s_1) \simeq G/IZ.$$

**Définition 2.4.1.** On définit le cercle de rayon  $n$  comme le sous-ensemble  $K\alpha^n s_0$  de  $S(\mathcal{T})$ , et la boule de rayon  $n$  autour de  $s_0$  comme  $\bigcup_{0 \leq i \leq n} K\alpha^i s_0$ .

Soit maintenant  $\sigma$  une représentation lisse de  $KZ$  sur un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $V_\sigma$ . Comme l'on a déjà montré, tout élément de  $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$  s'écrit comme une somme finie de la forme  $\sum_i [g_i, v_i]$  où  $g_i \in G$  et  $v_i \in V_\sigma$ .

**Définition 2.4.2.** Soit  $f \in \text{ind}_{KZ}^G \sigma$ , on appelle support de  $f$  l'ensemble des sommets  $gKZ \in S(\mathcal{T})$  tels que  $f(g^{-1}) \neq 0$ . (C'est indépendant du représentant  $g$  choisi).

Soit  $\sigma$  un poids de  $K$  que l'on étend à  $KZ$  en faisant agir  $p \in \mathbb{Q}_p^\times = Z$  trivialement. On a le théorème de structure suivant (cf. [1, Proposition 8]) :

**Théorème 2.4.3.** Supposons que  $\sigma$  est isomorphe à  $\text{Sym}^r(\mathbb{F}^2) \otimes (\det)^m$ . Avec les notations précédentes, on a alors un isomorphisme de  $\mathbb{F}$ -algèbres :

$$\mathcal{H}_G(KZ, \sigma) \simeq \mathbb{F}[T]$$

où l'opérateur  $T$  est associé par réciprocity de Frobenius à la fonction  $\varphi$  définie par les trois propriétés suivantes :

1.  $\varphi$  est à support dans  $KZ\alpha^{-1}K$  ;

2. Si  $0 \leq i \leq r-1$ , alors :

$$\varphi(\alpha^{-1})(x^{r-i}y^i) := 0$$

3.  $\varphi(\alpha^{-1})(y^r) := y^r$

On conclut cette section avec le lemme suivant qui nous servira par la suite :

**Lemme 2.4.4.** *Soit  $F_n$  l'ensemble des éléments de  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r \mathbb{F}^2$  à support dans la boule de rayon  $n$  autour de  $s_0$ . Soit  $c \in F_n$ . Si  $Tc \in F_n$ , alors  $c \in F_{n-1}$ .*

*Démonstration.* Voir [1, Lemme 20]. □

## 2.5 Anneaux des périodes

Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  dont le corps résiduel est  $k$ . Une *représentation  $p$ -adique* est la donnée d'un  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire continue de  $G_K$ . Notre problème est de comprendre le groupe  $G_K$  via l'étude de ses représentations  $p$ -adiques. Pour mettre un peu d'ordre dans les représentations  $p$ -adiques de  $G_K$ , l'idée de Fontaine est de construire des anneaux  $B$  munis d'actions de  $G_K$  et de structures additionnelles respectées par l'action de  $G_K$ . Chacun de ces anneaux permet d'isoler dans l'ensemble des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  celles qui sont  $B$ -admissibles (à savoir qui deviennent triviales quand on étend les scalaires à  $B$ ). Si  $V$  est une représentation  $B$ -admissible de  $G_K$ , le  $B^{G_K}$ -module  $(B \otimes V)^{G_K}$  est libre de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$  et est muni de toutes les structures additionnelles de  $B$  respectées par l'action de  $G_K$ . Ceci permet d'associer aux représentations de  $G_K$  des invariants plus maniables (en général des objets provenant de l'algèbre linéaire) et, lorsque l'anneau  $B$  est assez fin, de classifier les représentations  $B$ -admissibles à l'aide de ces invariants.

### 2.5.1 Les anneaux $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ et $\mathbb{B}_{\text{dR}}$

Soit  $\mathbb{C}_p$  le complété de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  pour la topologie  $p$ -adique. On fixe le choix d'une suite compatible  $(\epsilon_{p^n})_{n \geq 0}$  de racines primitives  $p^n$ -ièmes de l'unité. Soit

$$\tilde{\mathbb{E}} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbb{C}_p = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \mid (x^{(i+1)})^p = x^{(i)}\}$$

et soit  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbb{E}}$  tels que  $x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ . La somme et le produit de  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  sont donnés par les formules suivantes

$$(x + y)^{(n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})p^k \quad \text{et} \quad (xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)},$$

et la racine  $p$ -ième de  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est donnée par  $x^{1/p} = (x^{(n+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Si  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathbb{E}}$ , on pose  $v_{\mathbb{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$ , ce qui fait que l'on a  $v_{\mathbb{E}}(x) = p^n v_p(x^{(n)})$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Finalement, si  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$  et si  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathbb{E}}$  on fait agir  $\sigma$  sur  $x$  par  $\sigma(x) = (\sigma(x^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Théorème 2.5.1.** *i.  $\tilde{\mathbb{E}}$  est un corps parfait de caractéristique  $p$  et l'application  $v_{\mathbb{E}}$  en est une valuation pour laquelle il est complet.*

*ii. L'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $\tilde{\mathbb{E}}$  est continue, respecte sa structure de corps, et commute à l'action de l'endomorphisme de Frobenius  $\varphi$  défini par  $\varphi(x) = x^p$ .*

*Démonstration.* Voir [13, Proposition 4.10]. □

**Remarque 2.5.2.** *L'anneau des entiers de  $\tilde{\mathbb{E}}$  est  $\tilde{\mathbb{E}}^+$ .*

On note  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  l'anneau des vecteurs de Witt  $W(\tilde{\mathbb{E}}^+)$  à coefficients dans l'anneau parfait  $\tilde{\mathbb{E}}^+$ . Tout élément de  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  peut s'écrire de manière unique sous la forme  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n]$ , où  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  et où  $[x_n]$  est le représentant de Teichmüller de  $x_n$  dans  $\tilde{\mathbb{A}}^+$ . D'après les résultats généraux sur les vecteurs de Witt, les actions de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  et  $\varphi$  se relèvent de manière unique en des actions de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  et  $\varphi$  sur  $\tilde{\mathbb{A}}^+$ . De manière explicite, on a

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n^p] \quad \text{et} \quad \sigma\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n[\sigma(x_n)] \quad \text{si } \sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}.$$

On a  $\tilde{\mathbb{E}}^+ = \mathbb{R}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) = \mathbb{R}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p)$ . On note  $\bar{\theta} : \tilde{\mathbb{E}}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  l'application qui à  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$  associe  $x_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ . C'est un morphisme d'anneaux de  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  qui est clairement surjectif et commute à l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . On note  $\tilde{\theta} : \tilde{\mathbb{E}}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  l'application qui à  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$  associe  $x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ . C'est une application multiplicative de  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  dont la réduction modulo  $p$  est  $\bar{\theta}$ . Il résulte de la propriété universelle des vecteurs de Witt, que l'application  $\theta : \tilde{\mathbb{A}}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  définie par

$$\theta\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)},$$

est un morphisme d'anneaux.

**Remarque 2.5.3.** *La topologie naturelle sur  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  est celle qui fait de  $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n] \mapsto (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un homéomorphisme de  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  sur  $(\tilde{\mathbb{E}}^+)^{\mathbb{N}}$ , où l'on a muni  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  de la topologie définie par  $v_{\mathbb{E}}$ . Comme  $G_{\mathbb{Q}_p}$  agit continûment sur  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  pour la topologie définie par  $v_{\mathbb{E}}$ , il agit aussi continûment sur  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  muni de la topologie naturelle.*

**Proposition 2.5.4.** *i. Le morphisme  $\theta : \tilde{\mathbb{A}}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  est surjectif et commute avec l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ .*

*ii. Le noyau de  $\theta$  est un idéal principal et  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n]$  en est un générateur si et seulement si  $v_{\mathbb{E}}(x_0) = 1$ .*

*Démonstration.* Le (i) est immédiat ; montrons le (ii). Si  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n] \in \tilde{\mathbb{A}}^+$ , on note  $\bar{x} = x_0$  son image dans  $\tilde{\mathbb{E}}^+$ . Si  $x \in \ker(\theta)$ , on a  $x_0^{(0)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$ , ce qui implique  $v_{\mathbb{E}}(\bar{x}) = v_p(x_0^{(0)}) \geq 1$ . Soit alors  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$  vérifiant  $v_{\mathbb{E}}(\bar{x}) = 1$  et soit  $y \in \ker(\theta)$ . D'après ce qui précède, on a  $v_{\mathbb{E}}(\bar{y}) \geq 1$ . Il existe donc  $a_0 \in \tilde{\mathbb{E}}^+$  tel que  $\bar{y} = a_0 \bar{x}$ . On peut alors écrire  $y$  sous la forme  $y = [a_0]x + py_1$ , avec  $y_1 \in \tilde{\mathbb{A}}^+$ . De plus,  $p\theta(y_1) = \theta(y) - \theta([a_0])\theta(x) = 0$ , ce qui prouve que  $y_1 \in \ker(\theta)$ . On peut donc refaire avec  $y_1$  ce que l'on a fait avec  $y$ , ce qui permet de construire, par récurrence, une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  telle que l'on ait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y = ([a_0] + \dots + p^n [a_n])x + p^{n+1}y_{n+1}$  avec  $y_{n+1} \in \ker(\theta)$ . On a donc  $y = (\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [a_n])x$ , ce qui montre que  $x$  est un générateur de  $\ker(\theta)$  et permet de conclure.  $\square$

**Remarque 2.5.5.** Si  $\tilde{p} = (p, p^{1/p}, \dots) \in \tilde{\mathbb{E}}^+$ , alors  $[\tilde{p}] - p$  est un générateur de  $\ker(\theta)$ .

**Définition 2.5.6.** On note  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  le séparé complété de  $\tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}]$  pour la topologie  $([\tilde{p}] - p)$ -adique et  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  son corps des fractions, à savoir

$$\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ := \varprojlim_n \frac{\tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}]}{([\tilde{p}] - p)^n}, \quad \mathbb{B}_{\text{dR}} := \text{Frac}(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+).$$

L'anneau  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  est complet pour une valuation discrète d'idéal maximal  $([\tilde{p}] - p)$  et a même corps résiduel est que  $\tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}]$  à savoir  $\mathbb{C}_p$ . Comme  $\ker(\theta)$  est stable par  $G_{\mathbb{Q}_p}$  l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $\tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}]$  s'étend par continuité à  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ . Il est aussi muni d'une filtration décroissante indexée par  $\mathbb{Z}$  :

$$\text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}} := (p - [\tilde{p}])^m \mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \quad \text{si } m \in \mathbb{Z}.$$

Comme  $\theta([\epsilon] - 1) = \epsilon^{(0)} - 1 = 0$ , on a  $[\epsilon] - 1 \in \ker(\theta)$  donc la série  $\log[\epsilon] := -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-[\epsilon])^n}{n}$  converge dans  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ . On note  $t$  sa somme. Si  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ , on a

$$\sigma(t) = \sigma(\log[\epsilon]) = \log[\sigma(\epsilon)] = \log[\epsilon^{\chi(\sigma)}] = \chi(\sigma)\log[\epsilon] = \chi(\sigma)t.$$

Rappelons que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{Z}_p(m)$  la  $m$ -ième puissance tensorielle du  $\mathbb{Z}_p$ -module  $\mathbb{Z}_p(1)$  et  $\mathbb{Z}_p(-m)$  son dual. Rappelons aussi que si  $M$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module et si  $m \in \mathbb{Z}$ , on pose  $M(m)M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(m)$ . Il en résulte alors que, pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{gr}^m \mathbb{B}_{\text{dR}} = \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}} / \text{Fil}^{m+1} \mathbb{B}_{\text{dR}}$  s'identifie à  $\mathbb{C}_p(m)$ .

**Théorème 2.5.7.** (Tate-Sen) Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Si  $k \in \mathbb{Z}$ , alors  $\mathbb{C}_p(k)^{G_K} = \{x \in \mathbb{C}_p, \sigma(x) = \chi(\sigma)^k x, \text{ quel que soit } \sigma \in G_K\}$  est nul si  $k \neq 0$  et égal à  $K$  si  $k = 0$ .

*Démonstration.* Voir [33].  $\square$

**Proposition 2.5.8.** *i.*  $t$  est une uniformisante de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ .

*ii.* Si  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , alors  $(\mathbb{B}_{\text{dR}})^{G_K} = K$ .

*Démonstration.* On va montrer que, pour  $m \leq 0$ ,  $(\mathrm{Fil}^m \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^{G_K} \simeq K$ . Par le Théorème 2.5.7 on a  $(\mathrm{Fil}^m \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} / \mathrm{Fil}^{m+1} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^{G_K} = 0$  si  $m \neq 0$  et  $(\mathrm{Fil}^m \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} / \mathrm{Fil}^{m+1} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})^{G_K} = K$  si  $m = 0$ . On a de la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \frac{\mathrm{Fil}^m \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}}{\mathrm{Fil}^{m+r} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \rightarrow \frac{\mathrm{Fil}^m \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}}{\mathrm{Fil}^{m+r+1} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \rightarrow \frac{\mathrm{Fil}^{m+r} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}}{\mathrm{Fil}^{m+r+1} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}} \rightarrow 0,$$

en appliquant le foncteur des  $G_K$ -invariants, puis la limite projective sur  $r$  ce qui permet de conclure.  $\square$

Maintenant, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $K$ -espace vectoriel filtré.

**Définition 2.5.9.** On dit que  $V$  est de De Rham si  $\dim_K \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ .

**Définition 2.5.10.** Si  $V$  est une représentation de De Rham, les poids de Hodge-Tate sont les entiers  $h$  tels que  $\mathrm{Fil}^{-h} \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) \neq \mathrm{Fil}^{-h+1} \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ .

La multiplicité de  $h$  est alors  $\dim(\mathrm{Fil}^{-h} \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) / \mathrm{Fil}^{-h+1} \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V))$ , donc  $V$  possède  $d$  poids de Hodge-Tate.

**Remarque 2.5.11.** On ne peut pas étendre le Frobenius  $\varphi : \tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}] \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}]$  en une application continue  $\tilde{\varphi} : \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \rightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ . En effet  $\theta([\tilde{p}^{1/p}] - p) \neq 0$ , donc  $[\tilde{p}^{1/p}] - p$  est inversible dans  $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ . Or, si  $\tilde{\varphi}$  était une extension de  $\varphi : \tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}] \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}^+[\frac{1}{p}]$ , on aurait  $\tilde{\varphi}([1/\tilde{p}^{1/p}] - p) = 1/([\tilde{p}] - p)$ , et comme  $\theta([\tilde{p}] - p) = 0$ ,  $1/([\tilde{p}] - p) \notin \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ .

## 2.5.2 $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ , $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$

On note  $\sigma$  l'automorphisme de Frobenius de  $\tilde{\mathbb{A}}^+$ .

**Définition 2.5.12.** On note  $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$  le séparé complété pour la topologie  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $\tilde{\mathbb{A}}^+$  relativement à l'idéal noyau de  $\theta$ , à savoir

$$\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n \frac{(p - [\tilde{p}])^n}{n!}, \omega_n \in \tilde{\mathbb{E}}^+, \omega_n \rightarrow 0 \right\} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+.$$

On pose aussi  $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+ := \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}[1/p]$  et  $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} := \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+[1/t]$ .

**Lemme 2.5.13.** Avec les notations précédentes, on a  $t \in \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ .

*Démonstration.* Choisissons un générateur  $\xi$  de  $\ker(\theta)$ . Comme  $[\epsilon] - 1 \in \ker(\theta) = \xi \tilde{\mathbb{E}}^+$ , on a  $[\epsilon] - 1 = \omega \xi$  pour un certain  $\omega \in \tilde{\mathbb{E}}^+$ . On a donc, dans  $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ,

$$t = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{([\epsilon] - 1)^n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} (n-1)! \omega^n \cdot \frac{\xi^n}{n!}$$

avec  $(n-1)!\omega^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  dans  $\widetilde{\mathbb{E}}^+$  relativement à la topologie  $p$ -adique. Ce qui entraîne que  $t \in \mathbb{A}_{\text{cris}}$ . □

Les anneaux  $\mathbb{A}_{\text{cris}}$ ,  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+$  et  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$  sont munis d'une action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . Comme  $W(k) \subset \widetilde{\mathbb{A}}^+ \subset \mathbb{A}_{\text{cris}}$ , on a  $K_0 = W(k)[\frac{1}{p}] \subset \mathbb{B}_{\text{cris}}$ , donc  $K_0 \subset \mathbb{B}_{\text{cris}}^{G_K} \subset \mathbb{B}_{\text{dR}}^{G_K} \subset K$ .

**Théorème 2.5.14.** *L'application  $G_K$ -équivariante  $K \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}$  est injective.*

*Démonstration.* Voir [18, §4.1.2-4.1.3]. □

Le Théorème 2.5.14 combiné aux inclusions précédentes nous montre que  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^{G_K} = K_0$ .

**Définition 2.5.15.** *On note  $\mathbb{A}_{\text{cris}}^0$  l'enveloppe à puissances divisées de  $\widetilde{\mathbb{A}}^+$  relativement au noyau de  $\theta$ , à savoir  $\mathbb{A}_{\text{cris}}^0 = \widetilde{\mathbb{A}}^+[\xi^m/m!]_{m \geq 1}$  avec  $\xi$  générateur de l'idéal  $\ker(\theta)$*

Maintenant on veut examiner comment  $\sigma$ , défini sur  $\widetilde{\mathbb{A}}^+[1/p]$ , agit sur l'anneau  $\mathbb{A}_{\text{cris}}^0$ . Le lemme clé est le suivant :

**Lemme 2.5.16.** *L'anneau  $\mathbb{A}_{\text{cris}}^0$  est stable sous l'action de  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Soit  $\xi = [\tilde{p}] - p$ . Alors  $\sigma(\xi) = [\tilde{p}^p] - p = [\tilde{p}]^p - p = (\xi + p)^p - p = \xi^p + p\omega$  pour un certain  $\omega \in \widetilde{\mathbb{A}}^+$ . On obtient donc que :

$$\sigma(\xi) = p \cdot (\omega + (p-1)! \cdot (\xi^p/p!)),$$

donc que  $\sigma(\xi^m) = p^m(\omega + (p-1)! \cdot (\xi^p/p!))^m$  pour tout  $m \geq 1$ . Or  $p^m/m! \in \mathbb{Z}_p$  pour tout  $m \geq 1$ , donc  $\sigma(\xi^m/m!) \in \mathbb{A}_{\text{cris}}^0$  pour tout  $m \geq 1$ . □

L'endomorphisme de  $\mathbb{A}_{\text{cris}}^0$  induit par  $\sigma$  s'étend en un endomorphisme continu de  $\mathbb{A}_{\text{cris}}$ , donc en un endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ . On a  $\varphi(t) = pt$ . En effet, on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(\varphi([\epsilon]) - 1)^n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(\varphi([\epsilon^p]) - 1)^n}{n}$$

donc  $\varphi(t) = \log([\epsilon^p]) = pt$ . Par suite  $\varphi$  s'étend en un endomorphisme de  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ . Enfin, pour  $m \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\text{Fil}^m \mathbb{A}_{\text{cris}} := \mathbb{A}_{\text{cris}} \cap \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}}$ ,  $\text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ := \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \cap \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}}$  et  $\text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{cris}} := \mathbb{B}_{\text{cris}} \cap \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}}$ .

**Remarque 2.5.17.** *Le groupe de Galois absolu de  $\mathbb{Q}_p$  préserve  $\text{Fil}^m \mathbb{A}_{\text{cris}}$  et commute à l'action de  $\varphi$ . De plus,  $\varphi(\text{Fil}^m \mathbb{A}_{\text{cris}}) \subset \frac{p^m}{m!} \mathbb{A}_{\text{cris}}$ .*

**Définition 2.5.18.** *Étant donnée une représentation  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire  $V$  de  $G_K$ , on pose :*

$$\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) := (\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

*En général, cet espace vectoriel est de dimension inférieure ou égale à  $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ . On dit que  $V$  est cristalline lorsque  $\dim_{K_0} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ .*

### 2.5.3 Les anneaux $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$ et $\mathbb{B}_{\text{st}}$

La construction de  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$  et  $\mathbb{B}_{\text{st}}$ , contrairement à celle des autres anneaux, dépend du choix d'un élément  $\pi \in \overline{\mathbb{Z}}_p$  tel que  $v_p(\pi) > 0$ . Fixons un tel élément et considérons  $F := \mathbb{Q}_p(\pi)$  aussi que  $F_0 \subset F$  la plus grande extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $F$ .

Soit  $\tilde{\pi} := (\pi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathbb{E}}^+$  où  $\pi^{(n)}$  est une racine  $p^n$ -ième de l'image de  $\pi$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ . On pose :

$$\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi} := \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{[\tilde{\pi}]}{\pi} - 1\right)^n}{n} \in \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$$

(Rappelons que  $\frac{\tilde{\pi}}{\pi} - 1 \in \ker(\theta)$ ).

**Définition 2.5.19.** On note  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$  le sous-anneau de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  engendré par  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+$  et  $\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi}$  et  $\mathbb{B}_{\text{st}}(\pi) := \mathbb{B}_{\text{st}}^+(\pi)[1/t]$ .

**Théorème 2.5.20.** L'élément  $\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi} \in \mathbb{B}_{\text{dR}}$  est transcendant sur  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ . En particulier,  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+(\pi) \simeq \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi}]$ .

*Démonstration.* Voir [18]. □

**Lemme 2.5.21.** Comme sous-anneau de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  et de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$ ,  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+(\pi)$  et  $\mathbb{B}_{\text{st}}(\pi)$  ne dépendent pas du choix des  $(\pi^{(n)})_n$  (mais ils dépendent du choix de  $\pi$ ).

*Démonstration.* En remplaçant  $\tilde{\pi}$  par  $\tilde{\pi}\tilde{\epsilon}$ , l'expression  $\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi}$  se transforme en  $\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi} + \log[\tilde{\epsilon}]$ . Or  $\log[\tilde{\epsilon}] \in \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ , d'où le résultat. □

On note  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$  (resp.  $\mathbb{B}_{\text{st}}$ ) au lieu de  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+(\pi)$  (resp.  $\mathbb{B}_{\text{st}}(\pi)$ ). On veut définir plusieurs structures sur ces anneaux.

On commence par poser

$$\text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{st}}^+ := \mathbb{B}_{\text{st}}^+ \cap \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}} \quad (\text{resp. } \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{st}} := \mathbb{B}_{\text{st}} \cap \text{Fil}^m \mathbb{B}_{\text{dR}}).$$

Pour tout  $g \in G_F$ ,  $g(\log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi}) = \log \frac{[\tilde{\pi}]}{\pi} + \log[\underline{\epsilon}(g)]$ , où  $\underline{\epsilon}(g) := (\epsilon^{(n)}(g))_n \in \tilde{\mathbb{E}}^+$  est tel que  $\epsilon^{(n)}(g)$  soit l'image de  $\frac{g(\pi^{(n)})}{\pi^{(n)}}$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ . Ainsi,  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$  et  $\mathbb{B}_{\text{st}}$  sont munis d'une action de  $G_F$ . On a alors le lemme suivant (admis) :

**Lemme 2.5.22.** Soit  $K \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$  une extension finie de  $F$  et soit  $K_0$  la plus grande extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $K$ .

- i.  $(\mathbb{B}_{\text{st}}^+)^{G_K} = (\mathbb{B}_{\text{st}})^{G_K} = K_0$
- ii. L'application  $K \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\text{st}} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}$  est injective.

*Démonstration.* Voir [18]. □

Maintenant on munit  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$  et  $\mathbb{B}_{\text{st}}$  d'un Frobenius  $\varphi$ , déjà défini sur  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ , en posant  $\varphi(\log \frac{[\pi]}{\pi}) = p \log \frac{[\pi]}{\pi}$ . Le Frobenius  $\varphi$  commute à l'action de  $G_F$ . Enfin on munit  $\mathbb{B}_{\text{st}}^+$  et  $\mathbb{B}_{\text{st}}$  d'un opérateur de monodromie  $N$ . C'est l'unique  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ -dérivation de  $\mathbb{B}_{\text{st}}$  à valeurs dans  $\mathbb{B}_{\text{st}}$  telle que  $N(\log \frac{[\pi]}{\pi}) = 1$ . On voit que  $N$  commute à l'action de  $G_F$  et que :

$$N \circ \varphi = p\varphi \circ N.$$

## 2.6 Représentations $p$ -adiques Semi-Stables

On considère par  $F$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathcal{O}_F$  son anneau d'entiers,  $k_F$  son corps résiduel et  $\pi_F$  une uniformisante. On note  $F_0$  la plus grande extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $F$ . On note  $G_F := \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ .

**Lemme 2.6.1.** *i. Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_F$ , alors :*

$$\dim_{F_0}(\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_F} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

*ii. Si  $\dim_{F_0}(\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_F} = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ , alors :*

$$\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{F_0} (\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_F} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V.$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Voir [7, Lemme 3.1.2]. □

**Définition 2.6.2.** *i. Pour toute représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_F$ , on pose  $\mathbb{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_F}$ . On dit que  $V$  est semi-stable si  $\dim_{F_0}(\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_F} = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ .*

*ii. Une représentation  $p$ -adique de  $G_F$  est dite potentiellement semi-stable s'il existe une extension finie  $E$  de  $F$  telle que la restriction à  $G_E$  de  $V$  soit semi-stable.*

Soit maintenant  $V$  une représentation  $p$ -adique potentiellement semi-stable de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  à coefficients dans une extension finie  $E$  de  $\mathbb{Q}_p$ . Soient  $K$  une extension galoisienne finie de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  telle que  $V|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)}$  soit semi-stable et  $K_0$  la plus grande extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $K$ .

**Lemme 2.6.3.** *Posons  $\mathbb{D}_{\text{st},K}(V) = (\mathbb{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)}$ . C'est un  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module libre de rang  $\dim_E V$  muni d'un automorphisme  $F_0$ -semi-linéaire<sup>1</sup> et  $E$ -linéaire  $\varphi$ , d'un endomorphisme nilpotent  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -linéaire  $N$  tels que  $N\varphi = p\varphi N$ , et d'une action  $K_0$ -semi-linéaire et  $E$ -linéaire de  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$  qui commute avec  $\varphi$  et  $N$ .*

<sup>1</sup> par rapport au Frobenius de  $\text{Gal}(F_0/\mathbb{Q}_p)$

*Démonstration.* Voir [15, §B.1].  $\square$

On va munir  $\mathbb{D}_{\text{st},K}(V)$  d'une action du groupe de Weil  $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p} := \mathcal{W}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ . Soit  $g \in \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$  : alors  $\bar{g} := g \bmod W(\overline{\mathbb{Q}_p}/K) \in \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}/W(\overline{\mathbb{Q}_p}/K) \simeq \text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$  et  $g \bmod \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Z}_p}} = (\text{Frob})^{\alpha(g)} \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$  avec  $\alpha(g) \in \mathbb{Z}$ .

L'action de  $g \in \mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$  est alors donnée par  $\bar{g} \circ \phi^{-\alpha(g)}$ . Posons  $d = [K_0 : \mathbb{Q}_p]$  et supposons que  $E \supset K$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition 2.6.4.** *On a un isomorphisme  $E$ -linéaire :*

$$\mathbb{D}_{\text{st},K}(V) \simeq \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K_0, E)} \mathbb{D}_{\sigma, K}(V)$$

avec  $\mathbb{D}_{\sigma, K}(V) := \mathbb{D}_{\text{st},K}(V) \otimes_{(K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} E$  où le morphisme  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \rightarrow E$  est celui induit par la couple  $(\sigma, \text{id}_E)$ . De plus, chaque  $E$ -espace vectoriel  $\mathbb{D}_{\sigma, K}(V)$  est muni d'une action de  $(\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}, N)$ .

*Démonstration.* Voir [22, §2.4].  $\square$

En particulier, on voit que chaque  $\mathbb{D}_{\sigma, K}(V)$  est une représentation de Weil-Deligne, c'est-à-dire une représentation continue du groupe de Weil  $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}_p}$  munie d'un endomorphisme nilpotent  $N$  tel que  $Ng = p^{-\alpha(g)}gN$ , avec  $\alpha(g) \in \mathbb{Z}$  défini comme plus haut. On a alors le résultat suivant :

**Lemme 2.6.5.** *La classe d'isomorphisme de la représentation de Weil-Deligne  $\mathbb{D}_{\sigma, K}(V)$  est indépendante du choix de celui de  $\sigma$  et de l'extension  $K \subset E$  sur laquelle on a semi-stabilité.*

*Démonstration.* Voir [10, Lemme 2.2.1.2].  $\square$

Cette classe d'isomorphisme du Lemme 2.6.5 est par définition la *représentation de Weil-Deligne associée à la représentation  $p$ -adique potentiellement semi-stable  $V$* . On la note dorénavant  $\text{WD}(V)$ .

### Poids de Hodge-Tate et type galoisien

Rappelons la définition des poids de Hodge-Tate associés à une représentation potentiellement semi-stable de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  à coefficients dans une extension finie  $E$  de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . Pour toute représentation continue  $E$ -linéaire de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur un  $E$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie, on note :

$$(\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} := \{x \in \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \mid \forall g \in G_{\mathbb{Q}_p}, g(x) = \chi_{\text{cyc}}^i(g)x\}$$

(On munit  $\mathbb{C}_p$  de l'action naturelle de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ , et  $i \in \mathbb{Z}$ ). C'est un  $E$ -espace vectoriel de dimension finie et on a le résultat fondamental suivant :

**Proposition 2.6.6.** *On dispose d'un isomorphisme de  $\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -modules compatible à l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  :*

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

(l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  étant semi-linéaire sur  $\mathbb{C}_p$  et linéaire sur  $E$ ).

*Démonstration.* Voir [19]. □

**Définition 2.6.7.** *Les entiers  $i$  tels que  $(\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\}$  est non nul sont appelés les poids de Hodge-Tate de la représentation potentiellement semi-stable  $V$ .*

**Remarque 2.6.8.** *On peut montrer que  $(\mathbb{C}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = 0$  pour presque tout  $i \in \mathbb{Z}$ .*

**Définition 2.6.9.** *Un type galoisien de degré 2 (ou simplement un type galoisien) est une représentation de noyau ouvert :*

$$\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

(définie à équivalence près) qui s'étend en une représentation du groupe de Weil  $W_{\mathbb{Q}_p}$ .

**Définition 2.6.10.** *Soient  $\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  une représentation de noyau ouvert et  $V$  une représentation  $p$ -adique potentiellement semi-stable. On dit que  $V$  est de type  $\tau$  si  $\mathrm{WD}(V)|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \tau$ .*

Soient enfin  $k \geq 2$  un entier et  $\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow E^\times$ .

**Définition 2.6.11.** *Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur un  $E$ -espace vectoriel de dimension finie. On dit que  $V$  est de type  $(k, \tau, \psi)$  si  $V$  est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ , de type  $\tau$  et si  $\det(V) = \psi \chi_{\mathrm{cyc}}$ .*

**Remarque 2.6.12.** *Si  $V$  est de type  $(k, \tau, \psi)$ , alors  $\psi \chi_{\mathrm{cyc}}^{2-k}|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \det(\tau)$ .*

## 2.7 Le Foncteur $\mathcal{V}$ de Colmez

Un outil important pour le travail de Kisin est le foncteur  $\mathcal{V}$  introduit par Pierre Colmez. Il s'agit d'un foncteur contravariant exact entre la catégorie des représentations lisses de  $G$  de longueur finie avec caractère central, sur les  $\mathcal{O}$ -modules vers la catégorie des représentations continues de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur les  $\mathcal{O}$ -modules de longueur finie. L'équivalence entre les catégories  $\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$  et  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G_{\mathbb{Q}_p}$ , due à Fontaine [20], est le point de départ. Dans cette section on ne donnera que les définitions et les énoncés des résultats que nous serons utiles pour la suite.

**Notations :** On normalise la valuation  $p$ -adique  $v_p$  sur  $\mathbb{C}_p$  par  $v_p(p) = 1$ . On fixe une extension finie  $L$  de  $\mathbb{Q}_p$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  (on peut se permettre de remplacer  $L$  par une extension finie). On note  $\mathcal{O}_L$  son anneau des entiers,  $\mathfrak{m}_L = \{x \in L, v_p(x) > 0\}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_L$ , et  $k_L = \mathcal{O}_L/\mathfrak{m}_L$  le corps résiduel. On note  $\mathcal{H}$  le noyau de  $\chi_{\mathrm{cyc}}$ .

### Le corps $\mathcal{E}$

Soit  $\mathcal{E}$  le corps des séries de Laurent  $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k$ , avec  $a_k \in L$ , tel que la suite  $(v_p(a_k))_{k \in \mathbb{Z}}$  soit minorée et vérifie  $\lim_{k \rightarrow -\infty} v_p(a_k) = +\infty$ . Muni de la valuation  $v^{\{0\}}$  définie par  $v^{\{0\}}(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} v_p(a_k)$ , le corps  $\mathcal{E}$  est un corps complet pour une valuation discrète. L'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  des entiers de  $\mathcal{E}$  est l'anneau des séries de Laurent  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k$  avec  $a_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  tel que la suite  $v_p(a_k)$  vérifie  $\lim_{k \rightarrow -\infty} v_p(a_k) = +\infty$ . Le corps résiduel  $k_{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{E}$  est  $k_L((T))$ . La topologie naturelle sur  $A$  n'est pas celle définie par la valuation  $v^{\{0\}}$  (*topologie forte*) : c'est la *topologie faible*, qui est la topologie d'anneau la plus faible rendant continue la réduction modulo  $\mathfrak{m}_L : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow k_{\mathcal{E}}$ ,  $k_{\mathcal{E}}$  est muni de la topologie induite par la valuation  $v_T$ ; cette topologie est obtenue en munissant  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  de la base de voisinages de 0 donnée par les  $p^k \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + T^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ , pour  $k, n \in \mathbb{N}$ , où l'on a noté  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$  le sous-anneau  $\mathcal{O}_L[[T]]$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ . On munit alors  $\mathcal{E} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} p^{-m} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  de la topologie de la limite inductive. Soit  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ . Le caractère cyclotomique  $\chi_{\text{cyc}}$  induit un isomorphisme de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{Z}_p^*$ ; si  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ , on note  $\sigma_a \in \Gamma$  l'image inverse de  $a$  par  $\chi_{\text{cyc}}$ . On munit  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  d'actions  $\mathcal{O}_L$ -linéaires continues de  $\varphi$  et  $\Gamma$  respectant la structure d'anneau en posant :

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \quad \text{et} \quad \sigma_a(T) = (1+T)^a - 1, \quad \text{si } a \in \mathbb{Z}_p^*.$$

Ces actions commutent entre elles et s'étendent par  $\mathbb{Q}_p$ -linéarité à  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\frac{1}{p}]$ .

### $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales et représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$

**Définition 2.7.1.** *Si  $A$  est un anneau topologique muni d'actions continues de  $\varphi$  et  $\Gamma$  commutant entre elles, un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $A$  est un  $A$ -module de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de  $\varphi$  et  $\Gamma$  commutant entre elles.*

Ce qui précède s'applique en particulier à  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  et  $\mathcal{E}$ , ce qui mène aux définitions suivantes :

- Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  est *étale* si  $\varphi(D)$  engendre  $D$  comme  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module; l'action de  $\varphi$  est alors injective.
- Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{E}$  est *étale* s'il possède un  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$  qui est étale sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ .

Notons :

- $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales de torsion sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ .
- $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales libres sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ .
- $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $\mathcal{E}$ .

Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , alors  $D/p^k D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et  $D$  est la limite projective des  $D/p^k D$ . Par ailleurs, si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , alors  $D$  possède un sous- $A$ -réseau qui est un objet de  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ .

Si  $A$  est un anneau topologique, une représentation de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $A$  est un  $A$ -module de type fini muni d'une action  $A$ -linéaire continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ .

Notons :

- $\text{Rep}_{\text{tors}} G_{\mathbb{Q}_p}$  la catégorie des représentations de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  de longueur finie sur  $\mathcal{O}_L$ ,
- $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$  la catégorie des représentations de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  libres sur  $\mathcal{O}_L$ ,
- $\text{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p}$  la catégorie des représentations de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $L$ .

Si  $V$  est un objet de  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$ , alors  $V/p^k V$  est un objet de  $\text{Rep}_{\text{tors}} G_{\mathbb{Q}_p}$  pour tout  $k$ , et  $V$  est la limite projective des  $V/p^k V$ . Si  $V$  est un objet de  $\text{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p}$ , alors  $V$  possède des  $\mathcal{O}_L$ -réseaux stables par  $G_{\mathbb{Q}_p}$  (par compacité de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ ), et si  $V_0$  est l'un de ces réseaux, on a  $V = L \cdot V_0$ .

Soit maintenant  $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$ . Soit  $\mathbf{A}$  le complété pour la topologie  $p$ -adique de l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$  : il est muni d'une action de  $\varphi$  étendant celle existant sur  $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$  et d'une action continue (pour la topologie faible) de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  commutant à celle de  $\varphi$ .

**Théorème 2.7.2.** (*Fontaine*)

- (i) Si  $D$  est un  $M$ -module étale,  $\mathbf{V}(D) = ((\mathcal{O}_L \cdot \mathbf{A}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D)^{\varphi=1}$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ .
- (ii) Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ , alors  $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{\mathcal{H}}$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale.
- (iii) Les foncteurs  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{D}$  sont exacts, inverses l'un de l'autre, et induisent des équivalences de catégories

$$\text{Rep}_{\text{tors}} G_{\mathbb{Q}_p} \cong \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}, \quad \text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}), \quad \text{et} \quad \text{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E}).$$

*Démonstration.* Voir [20]. □

### Représentations irréductibles de $G$

On s'intéresse maintenant aux représentations lisses de  $G$  de longueur finie sur des espaces vectoriels sur  $k_L$ , et plus généralement sur des  $\mathcal{O}_L$ -modules. Une  $\mathcal{O}_L$ -représentation lisse de longueur finie de  $G$  est annulée par  $p^k$  pour un entier  $k \geq 0$ . Si elle est irréductible,  $\mathcal{O}_L$  agit alors à travers son corps résiduel  $k_L$ . On rappelle la définition suivante, que nous sera utile dans la suite :

**Définition 2.7.3.** Une représentation de  $G$  dans un  $\mathcal{O}_L$ -module  $M$  est dite à un caractère central s'il existe un homomorphisme continu  $\psi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$  tel que :

$$z \cdot m = \psi(z)m \quad \text{pour tous } z \in Z = \mathbb{Q}_p^\times \subset G \text{ et } m \in M.$$

Notons :

- $\text{Rep}_{\text{tors}} G$  la catégorie des  $\mathcal{O}_L[G]$ -modules  $\Pi$  lisses (i.e. l'action de  $G$  est localement constante), admissibles ( $\Pi^K$  est de longueur finie sur  $\mathcal{O}_L$  pour tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ ), de longueur finie et admettant un caractère central ;
- $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$  la catégorie des  $\mathcal{O}_L[G]$ -modules  $\Pi$  séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique sans  $p$ -torsion et tels que  $\Pi/p^n\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ , pour tout  $n$  ;
- $\text{Rep}_L G$  la catégorie des  $L[G]$ -modules munis d'un réseau appartenant à  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ .

Les objets irréductibles de  $\text{Rep}_{\text{tors}} G$  ont été classifiés par Barthel-Livné [1], [2] et Breuil [4] :

**Théorème 2.7.4.** *Toute représentation irréductible lisse admissible de  $G$  sur  $k_L$  est, à isomorphisme près, de l'une des quatre formes suivantes :*

i. *une représentation de dimension 1 :*

$$\chi \circ \det$$

où  $\chi$  est un caractère de  $\mathbb{Q}_p^\times$  à valeurs dans  $k_L^\times$  ;

ii. *une représentation de la forme :*

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \text{Sym}^r k_L^2}{T - \lambda} \otimes (\chi \circ \det)$$

avec  $0 \leq r \leq p - 1$ ,  $\lambda \in k_L^\times$  et  $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p - 1, \pm 1)\}$  ;

iii. *une représentation de la forme :*

$$\ker \left( \frac{\text{ind}_{KZ}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \text{Sym}^r k_L^2}{T - \lambda} \right) \otimes (\chi \circ \det) ;$$

iv. *une représentation de la forme :*

$$\frac{\text{ind}_{KZ}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \text{Sym}^r k_L^2}{(T)} \otimes (\chi \circ \det)$$

avec  $0 \leq r \leq p - 1$ .

*Démonstration.* Voir [1, Théorème 30] et [4, Théorème 1.1]. □

**Définition 2.7.5.** *Avec les notations de l'énoncé du Théorème 2.7.4, on pose, pour tout triplet  $(r, \lambda, \chi)$  :*

$$\pi(r, \lambda, \chi) := \frac{\text{ind}_{KZ}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \text{Sym}^r k_L^2}{T - \lambda} \otimes (\chi \circ \det).$$

On note aussi  $\mu_x : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow k_L^\times$  le caractère non ramifié envoyant  $p$  sur  $x \in k_L^\times$ .

Soient  $\omega$  le caractère cyclotomique modulo  $p$  vu comme caractère de  $\mathbb{Q}_p^\times$  via l'isomorphisme de réciprocité (normalisé pour que les uniformisantes correspondent aux Frobenius géométriques), et  $\mu_{-1}$  l'unique caractère quadratique non ramifié de  $\mathbb{Q}_p^\times$ . On a le théorème suivant :

**Théorème 2.7.6.** *Les équivalences entre les représentations irréductibles, lisses et admissibles sur  $G$  sont les suivantes ( $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow k_L$ ) :*

$$\begin{aligned} \pi(r, \lambda, \chi) &\cong \pi(r, -\lambda, \chi\mu_{-1}) \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \pi(0, \lambda, \chi) &\cong \pi(p-1, \lambda, \chi) \text{ si } \lambda \neq \pm 1 \\ \pi(r, 0, \chi) &\cong \pi(p-1-r, 0, \chi\omega^r) \\ \pi(r, 0, \chi) &\cong \pi(p-1-r, 0, \chi\omega^r\mu_{-1}) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Voir [1, Corollaire 36], et [4, Théorème 1.3]. □

### Les foncteurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{V}$ de Colmez

Le foncteur  $\mathcal{D}$  de Colmez va de la catégorie  $\text{Rep}_{\text{tors}} G$  vers la catégorie  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ . Ce foncteur est contravariant et exact ([12, Théorème IV.2.13]). On étend le foncteur  $\mathcal{D}$  aux objets de  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$  et  $\text{Rep}_L G$  de la manière suivante :

- Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ , alors  $\mathcal{D}(\Pi)$  est la limite projective des  $\mathcal{D}(\Pi/p^k\Pi)$ ,
  - Si  $\Pi \in \text{Rep}_L G$  et si  $\Pi_0 \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$  est un  $\mathcal{O}_L$ -réseau de  $\Pi$ , alors  $\mathcal{D}(\Pi) := L \cdot \mathcal{D}(\Pi_0)$ .
- On obtient de la sorte des foncteurs exacts contravariants de  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$  dans  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  et de  $\text{Rep}_L G$  dans  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

On définit  $\mathcal{V}(\Pi)$  comme le dual de Tate de  $\mathbb{V}(\mathcal{D}(\Pi))$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{V}(\Pi) = \text{Hom}(\mathbb{V}(\mathcal{D}(\Pi)), L/\mathcal{O}_L) \otimes \chi.$$

Ce qui précède se traduit alors, grâce à l'équivalence de catégories de Fontaine (cf. Théorème 2.7.2), de la manière suivante :

**Théorème 2.7.7.** *L'application  $\Pi \rightarrow \mathcal{V}(\Pi)$  est un foncteur exact covariant*

- de  $\text{Rep}_{\text{tors}} G$  dans  $\text{Rep}_{\text{tors}} G_{\mathbb{Q}_p}$ ,
- de  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$  dans  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G_{\mathbb{Q}_p}$ ,
- de  $\text{Rep}_L G$  dans  $\text{Rep}_L G_{\mathbb{Q}_p}$ .

Soit  $\mathbb{Q}_{p^2}$  l'extension quadratique non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ , et soit  $\mathbb{Z}_{p^2}$  l'anneau des entiers. Soit  $\omega_2 : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mu_{p^2-1}(\overline{\mathbb{Q}_p}^\times) \subset \overline{\mathbb{F}_p}^\times$  le caractère de Serre de niveau 2 défini par  $\omega_2(g) = \frac{g(p^{1/(p^2-1)})}{p^{1/(p^2-1)}}$  si  $g \in I_{\mathbb{Q}_p}$ . Le théorème suivant décrit l'action du foncteur  $\mathcal{V}$  sur les représentations irréductibles de  $G$ .

**Théorème 2.7.8.** *i. Si  $\Pi$  est de la forme  $\chi \circ \det$  alors  $\mathcal{V}(\Pi) = 0$ .*

- ii. Si  $\Pi$  est de la forme  $\pi(r, \lambda, \chi)$ , avec  $\lambda \neq 0$ , alors  $\mathcal{V}(\pi(r, \lambda, \chi)) = \omega^{r+1} \mu_\lambda \chi$ .
- iii. Si  $\Pi$  est de la forme  $\pi(r, 0, \chi)$ , alors  $\mathcal{V}(\pi(r, 0, \chi)) = \left( \text{ind}_{G_{\mathbb{Q}_p^2}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} \omega_2^{r+1} \right) \otimes \chi$ . En particulier  $\mathcal{V}(\pi(r, 0, \chi))$  est irréductible de dimension 2 sur  $k_L$ .

*Démonstration.* Voir [12, Théorème 0.10]. □

Soit  $\Pi$  une représentation de  $G$  sur un  $\mathcal{O}_L$ -module avec caractère central, et  $\Pi_n := \Pi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n$ . On suppose que  $\Pi$  est séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique, c'est-à-dire  $\Pi = \varprojlim \Pi_n$ , et que  $\Pi_n$  est de longueur finie pour tout  $n$ . On définit  $\mathcal{V}(\Pi) := \varprojlim \mathcal{V}(\Pi_n)$ . Comme les représentations sont de longueur finie et puisque on a la suite exacte  $0 \rightarrow p\Pi_n \rightarrow \Pi_n \rightarrow \Pi_n \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0$  on obtient :

$$0 \rightarrow p \varprojlim \Pi_n \rightarrow \varprojlim \Pi_n \rightarrow \varprojlim (\Pi_n \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et donc  $\mathcal{V}(\Pi)/p\mathcal{V}(\Pi) \cong \mathcal{V}(\Pi_1)$ . En particulier  $\mathcal{V}(\Pi)$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini. On appelle une telle représentation un  $\mathcal{O}_L$ -réseau admissible.



## Chapitre 3

# La Conjecture de Breuil-Mézard

### 3.1 Polynômes de Hilbert-Samuel et multiplicités

Dans cette section on commence par rappeler d'abord la construction d'un polynôme de Hilbert-Samuel associé à un module gradué  $M$  de type fini sur un anneau noethérien  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  avec  $R_0$  artinien. On utilise les résultats obtenus pour définir l'application de Samuel associé à un  $A$ -module de type fini, où  $A$  est un anneau semi-local noethérien. On termine en définissant la multiplicité de Hilbert-Samuel pour un  $A$ -module  $M$ , avec  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local noethérien (comme dans [30]) et une variante (comme dans [26]).

**Convention :** Les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unifères, et les modules sont supposés unitaires.

#### 3.1.1 Modules gradués et application de Hilbert

**Définition 3.1.1.** Nous appellerons *semi-groupe abélien* un ensemble  $G$  muni d'une loi d'addition  $+$  telle que l'on ait :

*Associativité :* pour tous  $x, y$  et  $z \in G$ , on a  $:(x + y) + z = x + (y + z)$  ;

*Commutativité :* pour tous  $x, y \in G$ , on a  $:(x + y) = y + x$  ;

pour tout  $x \in G$ ,  $0 + x = x$ .

**Définition 3.1.2.** Nous appellerons *anneau gradué* un anneau  $R$  muni d'une décomposition en somme directe :

$$R = \bigoplus_{i \in G} R_i$$

avec  $G$  semi-groupe abélien, et telle que  $R_i R_j \subset R_{i+j}$  pour tous  $i, j \in G$ .

Nous appellerons *module gradué sur l'anneau gradué  $R$*  un  $R$ -module  $M$  muni d'une

décomposition en somme directe :

$$M = \bigoplus_{i \in G} M_i$$

telle que  $R_i M_j \subset M_{i+j} \forall i, j$ . Les éléments de  $M_i$  sont dits homogènes de degré  $i$ . Un sous-module  $N \subset M$  est dit homogène (ou : sous-module gradué) s'il peut être engendré par des éléments homogènes de  $M$ .

**Lemme 3.1.3.** Soient  $M$  un module gradué et  $N$  un sous-module de  $M$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $N$  est un sous-module homogène ;
- (2) Pour  $x \in M$ , si  $x \in N$  alors chaque terme homogène de  $x$  est dans  $N$  ;
- (3)  $N = \sum_{i \in G} (N \cap M_i)$ .

*Démonstration.* Découle de la définition 3.1.2. □

**Remarque 3.1.4.** (1) Pour un sous-module homogène  $N \subset M$ , on pose  $N_i = M_i \cap N$ . Alors  $M/N = \bigoplus M_i/N_i$  est encore un sous- $R$ -module gradué.

(2) La définition 3.1.2 entraîne que  $R_0 \subset R$  est un sous-anneau et que pour tout  $i \in G$   $M_i$  est un  $R_0$ -module.

(3) On utilise la notion d'anneau gradué lorsque  $G$  est le semi-groupe  $\{0, 1, 2, \dots\}$  des entiers positifs, que l'on note  $\mathbb{N}$ . Dans ce cas, on note  $R^+ = \sum_{n>0} R_n$  : c'est un idéal de  $R$  tel que  $R/R^+ \simeq R_0$ .

**Définition 3.1.5.** Nous appellerons anneau filtré un anneau  $A$  muni d'une famille  $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  d'idéaux vérifiant les conditions suivantes :

$$J_0 = A, \quad J_{n+1} \subset J_n, \quad J_n J_m \subset J_{n+m}.$$

Nous appellerons module filtré sur l'anneau filtré  $A$  un  $A$ -module  $M$  muni d'une famille  $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de sous-modules vérifiant les conditions suivantes :

$$M_0 = M, \quad M_{n+1} \subset M_n, \quad J_n M_m \subset M_{n+m}.$$

Si maintenant  $M$  est un module filtré sur un anneau filtré  $A$ , on note  $\text{gr}(M)$  la somme directe  $\bigoplus_{n \geq 0} M_n/M_{n+1}$  des groupes abéliens  $\text{gr}_n(M) = M_n/M_{n+1}$ . Les applications canoniques de  $J_n \times M_m$  dans  $M_{n+m}$  définissent, par passage au quotient, des applications bilinéaires de  $\text{gr}_n(A) \times \text{gr}_m(M)$  dans  $\text{gr}_{n+m}(M)$ , d'où une application bilinéaire de  $\text{gr}(A) \times \text{gr}(M)$  dans  $\text{gr}(M)$ . En particulier, pour  $M = A$ , on obtient sur  $\text{gr}(A)$  une structure d'anneau gradué : c'est l'anneau gradué associé à l'anneau filtré  $A$ . De même, l'application  $\text{gr}(A) \times \text{gr}(M) \rightarrow \text{gr}(M)$  munit  $\text{gr}(M)$  d'une structure de  $\text{gr}(A)$ -module gradué. D'ailleurs, tout élément de  $\text{gr}_n(A)$  peut être écrit comme une combinaison linéaire de produits de  $n$  éléments de  $\text{gr}_1(A)$ . Par conséquent,  $\text{gr}(A)$  est engendré sur le

sous-anneau  $\text{gr}_0(A)$  par des éléments de  $\text{gr}_1(A)$ . Si  $J = Ax_1 + \dots + Ax_r$  et si l'on note  $\xi_i$  l'image de  $x_i$  dans  $\text{gr}_1(A)$ , alors

$$\text{gr}(A) = (A/I)[\xi_1, \dots, \xi_n],$$

et  $\text{gr}(A)$  est un quotient de l'anneau des polynômes comme anneau gradué.

**Théorème 3.1.6.** *Un anneau  $\mathbb{N}$ -gradué  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  est Nothérien si et seulement si  $R_0$  est noethérien et  $R$  est un anneau de type fini sur  $R_0$ .*

*Démonstration.* Voir [30, Théorème 13.1]. □

**Lemme 3.1.7.** *Soit  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  un anneau noethérien gradué. Si  $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$  est un  $R$ -module de type fini, chaque  $M_n$  est un  $R_0$ -module de type fini.*

*Démonstration.* En effet, supposons d'abord  $M = R$ . Le Théorème 3.1.6 entraîne que  $R = R_0[x_1, \dots, x_n]$  où l'on peut supposer les  $x_i$  homogènes de degré  $d_i$ . On a alors :

$$R_n = x_1 R_{n-d_1} + \dots + x_r R_{n-d_r}$$

ce qui permet de conclure. Dans le cas général  $M$  peut être engendré par un nombre fini d'éléments homogènes  $\omega_i$  :  $M = R\omega_1 + \dots + R\omega_s$ . Si on note  $e_i$  le degré de  $\omega_i$ , on a, comme ci-dessus :

$$M_n = R_{n-e_1}\omega_1 + \dots + R_{n-e_s}\omega_s \quad (\text{où } R_i = 0 \text{ si } i < 0),$$

donc  $M_n$  est un  $R_0$ -module de type fini. □

En particulier, si  $R_0$  est un anneau artinien, alors  $l(M_n) < \infty$ , où l'on note  $l$  la longueur comme  $R_0$ -module. Dans ce cas on peut définir la série de Hilbert  $P(M, t)$  de  $M$  par la formule :

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

**Théorème 3.1.8.** *Soit  $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$  un anneau gradué avec  $R_0$  artinien. Soit  $M$  un  $R$ -module de type fini. Supposons que  $R = R_0[x_1, \dots, x_r]$  avec  $x_i$  de degré  $d_i$ , et  $P(M, t)$  comme ci-dessus. Alors  $P(M, t)$  est une fonction rationnelle en  $t$ , et on peut l'écrire :*

$$P(M, t) = f(t) / \prod_{i=1}^r (1 - t^{d_i}),$$

où  $f(t)$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Par récurrence sur le nombre  $r$  de générateurs de  $R$ . Lorsque  $r = 0$  on a  $R = R_0$ , donc, pour  $n$  assez grand,  $M_n = 0$  (puisque dans ce cas  $M$  est de type fini sur  $R_0$ ) et la série  $P(M, t)$  est alors un polynôme. Si  $r > 0$ , la multiplication par  $x_r$  définit une application  $R_0$ -linéaire  $M_n \rightarrow M_{n+d_r}$ . En notant  $K_n$  et  $L_{n+d_r}$  son noyau et son conoyau, on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r} \rightarrow L_{n+d_r}.$$

Posons  $K = \bigoplus K_n$  et  $L = \bigoplus L_n$ . Alors  $K$  est un sous-module de  $M$  et  $L = M/x_r M$ , donc  $K$  et  $L$  sont des  $R$ -modules de type fini puisque  $R$  est noethérien. De plus,  $x_r K = x_r L = 0$ , donc on peut voir  $K$  et  $L$  comme des  $R/x_r R$ -modules et appliquer l'hypothèse de récurrence à  $P(M, t)$  et  $P(L, t)$ . On déduit de la suite exacte ci-dessus que :

$$l(K_n) - l(M_n) + l(M_{n+d_r}) - l(L_{n+d_r}) = 0.$$

Si l'on multiplie par  $t^{n+d_r}$  puis que l'on fait la somme sur  $n$ , on obtient :

$$t^{d_r} P(K, t) - t^{d_r} P(M, t) + P(M, t) - P(L, t) = g(t),$$

avec  $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ , ce qui prouve le théorème. □

On veut maintenant étudier le cas  $d_1 = \dots = d_r = 1$ , à savoir celui où  $R$  est engendré sur  $R_0$  par des éléments de degré 1. Le Théorème 3.1.8 entraîne que  $P(M, t) = f(t)(1-t)^{-r}$ . On peut donc écrire  $P$  sous la forme

$$P(M, t) = f(t)(1-t)^{-d} \text{ avec } f \in \mathbb{Z}[t], d \geq 0, \\ \text{et } f(1) \neq 0 \text{ si } d \neq 0.$$

On note  $d = d(M)$ . Le corollaire suivant fournit des informations importantes sur la longueur des  $M_n$ .

**Corollaire 3.1.9.** *Soit  $s$  le degré du polynôme  $(1-t)^d P(M, t)$ . Si  $d_1 = \dots = d_r = 1$ , et si  $d = d(M)$  est défini comme ci-dessus, alors il existe un polynôme  $\varphi_M(X)$  de degré  $d-1$  à coefficients rationnels tel que, si  $n \geq s+1-d$ , on a  $l(M_n) = \varphi_M(n)$ .*

*Démonstration.* Comme  $(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \dots$ , on peut montrer par récurrence la formule suivante (en différentiant plusieurs fois les deux côtés) :

$$(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} t^n.$$

Si  $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s$  alors

$$(*) \quad l(M_n) = a_0 \binom{d+n-1}{d-1} + a_1 \binom{d+n-2}{d-1} + \dots + a_s \binom{d+n-s-1}{d-1}$$

Le membre de droite peut être réécrit sous la forme d'un polynôme en  $n$  à coefficients rationnels que on note  $\varphi_M(n)$ . On a alors :

$$\varphi_M(X) = \frac{f(1)}{(d-1)!} X^{d-1} + \{\text{termes de degré plus petit}\}.$$

Puisque  $\binom{m}{d-1}$  coïncide avec le polynôme  $m(m-1)\dots(m-d+2)/(d-1)!$  si  $m \geq 0$ , cela entraîne le résultat. □

On appelle  $\varphi_M$  le polynôme de Hilbert du module gradué  $M$ . L'application numérique  $M_n \rightarrow l(M_n)$  est appelée l'application de Hilbert de  $M$ .

### 3.1.2 Application de Samuel

Soit  $A$  un anneau noethérien, semi-local (c'est-à-dire ne possédant qu'un nombre fini d'idéaux maximaux), et soit  $\mathfrak{m}$  son radical de Jacobson. Soit  $I$  un idéal de  $A$  tel qu'il existe  $\nu > 0$  avec  $\mathfrak{m}^\nu \subset I \subset \mathfrak{m}$ . On appelle *idéal de définition* tout idéal qui vérifie cette condition. Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. On note  $\text{gr}_I(A) = A'$  et  $\text{gr}_I(M) = M'$ . Alors l'anneau  $A'_0 = A/I$  est artinien, et si  $I = \sum_{i=1}^r x_i A$ , et  $\xi_i$  est l'image de  $x_i$  dans  $I/I^2$ , alors  $A' = A'_0[\xi_1, \dots, \xi_r]$ . Si en outre  $M = \sum_{i=1}^s A\omega_i$  alors  $M' = \sum_{i=1}^s A'\bar{\omega}_i$  (où  $\bar{\omega}_i$  est l'image de  $\omega_i$  dans  $M'_0$ ), on peut donc appliquer le Théorème 3.1.8 et le Corollaire 3.1.9. On constate que  $l(M'_n) = l(I^n M / I^{n+1} M)$  (où le membre de gauche est la longueur comme  $A'_0$ -module et le membre de droite comme  $A$ -module), et on obtient

$$\sum_{i=0}^n l(M'_i) = l(M / I^{n+1} M).$$

Maintenant nous définissons  $\chi_M^I(n) = l(M / I^{n+1} M)$ . Nous écrivons  $\chi_M(n)$  au lieu de  $\chi_M^{\mathfrak{m}}(n)$ . L'application  $\chi_M(n)$  est appelée application de Samuel du  $A$ -module  $M$ .

**Lemme 3.1.10.** *Soit  $\chi_M^I(n)$  définie comme ci-dessus. Alors, pour  $n$  assez grand,  $\chi_M^I(n)$  est un polynôme en  $n$  de degré  $d$ . Ce degré  $d$  est déterminé par  $M$  et il ne dépend pas de  $I$ .*

*Démonstration.* On utilise la formule bien connue  $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$  et on obtient

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{d+\nu-1}{d-1} = \binom{d+n}{d}.$$

Donc on en déduit, en combinant avec la formule (\*)

$$\chi_M^I = a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d},$$

avec  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Lorsque  $n \geq s$  il s'agit d'un polynôme en  $n$  de degré  $d$ . Maintenant, si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux de définition  $A$  alors il existe deux nombres naturels  $a$  et  $b$  tels que  $I^a \subset J$ ,  $J^b \subset I$ , et donc

$$\chi_M^I(an + a - 1) \geq \chi_M^J(n) \quad \text{et} \quad \chi_M^J(bn + b - 1) \geq \chi_M^I(n).$$

□

Nous écrivons  $d = d(M)$ .

**Théorème 3.1.11.** *Soit  $A$  un anneau semi-local noethérien, et  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $A$ -modules de type fini; Alors*

$$d(M) = \max(d(M'), d(M''))$$

*Démonstration.* On peut supposer  $M'' = M/M'$ . Alors, comme  $M''/I^n M'' = M/(M' + I^n M)$  on a

$$\begin{aligned} l(M/I^n M) &= l(M/(M' + I^n M)) + l((M' + I^n M)/I^n M) \\ &= l(M''/I^n M'') + l(M'/M' \cap I^n M). \end{aligned}$$

On définit  $\phi(n) = l(M'/M' \cap I^n M)$  et on a  $\chi_M^I = \chi_{M''}^I + \phi$ . Comme  $\chi_{M''}^I$  et  $\phi$  sont à valeurs positives,  $d(M) = \max(d(M''), (\deg)\phi)$ . Or, par le Lemme de Artin-Rees (cf. [30, Théorème 8.5]), il existe  $c > 0$  tel que

$$n > c \text{ entraîne } I^{n+1}M' \subset M' \cap I^{n+1}M \subset I^{n-c-1}M',$$

et donc

$$\chi_{M'}^I(n) \geq \varphi(n) \geq \chi_{M'}^I(n - c);$$

On peut conclure que  $\varphi$  et  $\chi_{M'}^I$  ont le même coefficient dominant. □

Nous définissons maintenant une autre mesure de la taille de  $M$ . Soit  $\delta(M)$  l'élément minimum dans le sous-ensemble des entiers naturels  $n$  tels qu'ils existent  $x_1, \dots, x_n \in M$  pour lesquels on a  $l(M/x_1M + \dots + x_nM) < \infty$ . On définit  $\delta(M) = 0$  lorsque  $l(M) < \infty$ . Si  $I$  est un idéal de définition de  $A$  alors  $l(M/IM) < \infty$ , donc  $\delta(M) \leq$  nombre de générateurs de  $I$ . D'autre part, si  $A$  est un anneau local et  $M = A$ , alors  $l(A/I) < \infty$  entraîne que  $I$  est un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire. Dans ce cas  $\delta(A)$  est le nombre minimum de générateurs des idéaux  $\mathfrak{m}$ -primaires. Nous rappelons que  $\dim(M) = \dim(A/\text{Ann}(M))$ . On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.1.12.** *Soit  $A$  un anneau semi-local noethérien et  $M$  un  $A$ -module de type fini; alors on a :*

$$\dim(M) = d(M) = \delta(M)$$

*Démonstration.* Voir [30, Théorème 13.4]. □

### 3.1.3 Systèmes de Paramètres et Multiplicité

Soit  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local noethérien de dimension  $r$  ; Pour le Théorème 3.1.12, il existe un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire engendré par  $r$  éléments, mais il n'existe pas un idéal engendré par un nombre inférieur d'éléments. Si  $a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$  engendrent un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire,  $\{a_1, \dots, a_r\}$  est appelé un *système de paramètres de  $M$* . Si  $M$  est un  $A$ -module de type fini avec  $\dim M = s$ , alors il existe  $\{y_1, \dots, y_s\} \in \mathfrak{m}$  tels que  $l(M/(y_1, \dots, y_s)M) < \infty$  et  $\{y_1, \dots, y_s\}$  est appelé un *système de paramètres de  $M$* .

Soit maintenant  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local noethérien de dimension  $d$ ,  $M$  un  $A$ -module de type fini, et  $\mathfrak{q}$  un idéal de définition de  $A$ , à savoir un idéal  $\mathfrak{m}$ -primaire. Comme on a déjà vu dans le paragraphe 3.1.2, on peut écrire l'application de Samuel  $l(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = \chi_M^{\mathfrak{q}}(n)$  sous la forme d'un polynôme en  $n$  pour  $n$  assez grand. Il s'agit d'un polynôme à coefficient rationnels, degré égal à  $\dim M$  (donc au plus  $d$ ), et il prend des valeurs entières positives pour  $n$  assez grand. Il est facile de voir par récurrence sur  $d$ , en utilisant le fait que  $\chi(n+1) - \chi(n)$  a la même propriété, que

$$\chi_M^{\mathfrak{q}}(n) = \frac{e}{d!}n^d + \{\text{termes de degré plus petit}\},$$

avec  $e \in \mathbb{Z}$ . Nous écrivons ce nombre entier  $e(\mathfrak{q}, M)$ . On déduit de la définition les propriétés suivantes :

*Formule 1.*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{n^d} l(M/\mathfrak{q}^n M)$ , et en particulier, si  $d = 0$   $e(\mathfrak{q}, M) = l(M)$  ;

*Formule 2.*  $e(\mathfrak{q}, M) > 0$  si  $\dim M = d$ , et  $e(\mathfrak{q}, M) = 0$  si  $\dim M < d$  ;

*Formule 3.*  $e(\mathfrak{q}^r, M) = e(\mathfrak{q}, M)r^d$  ;

*Formule 4.* Si  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$  sont deux idéaux  $\mathfrak{m}$ -primaires et  $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$  alors  $e(\mathfrak{q}, M) \leq e(\mathfrak{q}', M)$ .

**Théorème 3.1.13.** *Soit  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $A$ -modules de type fini. Alors*

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}, M') + e(\mathfrak{q}, M'').$$

*Démonstration.* On peut voir  $M'$  comme sous-module de  $M$ . Alors

$$l(M/\mathfrak{q}^n M) = l(M''/\mathfrak{q}^n M'') + l(M'/M' \cap \mathfrak{q}^n M),$$

et évidemment  $\mathfrak{q}^n M' \subset M' \cap \mathfrak{q}^n M$ . D'autre part, par le Lemme d'Artin-Rees, il existe  $c > 0$  tel que

$$M' \cap \mathfrak{q}^n M \subset \mathfrak{q}^{n-c} M' \text{ pour tout } n > c.$$

Donc on obtient

$$l(M'/\mathfrak{q}^{n-c} M') \leq l(M'/M' \cap \mathfrak{q}^n M) \leq l(M'/\mathfrak{q}^n M')$$

En utilisant cette formule et la *Formule 1*, on a

$$e(\mathfrak{q}, M) - e(\mathfrak{q}, M'') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d!}{n^d} l(M'/M' \cap \mathfrak{q}^n M) = e(\mathfrak{q}, M').$$

□

On utilisera le résultat suivant dans la suite :

**Théorème 3.1.14.** *Soient  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$  les idéaux premiers minimaux de  $A$  tels que  $\dim A/\mathfrak{p} = d$ ; alors*

$$e(\mathfrak{q}, M) = \sum_{i=1}^t e(\bar{\mathfrak{q}}_i, A/\mathfrak{p}_i) l(M_{\mathfrak{p}_i})$$

où on note  $\bar{\mathfrak{q}}_i$  l'image de  $\mathfrak{q}$  dans  $A/\mathfrak{p}_i$ , et  $l(M_{\mathfrak{p}_i})$  est la longueur de  $M_{\mathfrak{p}_i}$  comme  $A_{\mathfrak{p}_i}$ -module.

*Démonstration.* Nous écrivons  $\sigma = \sum_i l(M_{\mathfrak{p}_i})$  et nous prouvons le résultat par récurrence sur  $\sigma$ . Si  $\sigma = 0$  alors  $\dim M < d$ . En effet  $l(M_{\mathfrak{p}_i}) = 0$  entraîne  $\text{Ann}(M) \subsetneq \mathfrak{p}_i$  pour tout  $i$  et alors  $\mathfrak{p}_i \subset \text{Ann}(M)$  pour minimalité. Donc le membre de gauche est 0 et aussi le membre de droite; maintenant on suppose  $\sigma > 0$ . Il existe  $\mathfrak{p} \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$  tel que  $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ ; alors  $\mathfrak{p}$  est un élément minimal de  $\text{Supp}(M)$ . Par [30, Lemme 6.5],  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(M)$ , c'est-à-dire  $M$  contient un sous-module  $N$  isomorphe à  $A/\mathfrak{p}$ . Alors

$$e(\mathfrak{q}, M) = e(\mathfrak{q}, N) + e(\mathfrak{q}, M/N).$$

d'autre part,  $N_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$  et  $N_{\mathfrak{p}_i} = 0$  pour  $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$ , donc  $l(N_{\mathfrak{p}}) = 1$ , et la valeur de  $\sigma$  diminue de 1 (on utilise le fait que  $l((M/N)_{\mathfrak{p}}) = l(M_{\mathfrak{p}}/N_{\mathfrak{p}}) = l(M_{\mathfrak{p}}) - l(N_{\mathfrak{p}})$ ), et donc on applique l'hypothèse de récurrence à  $M/N$ . D'autre part on a

$$e(\mathfrak{q}, N) = e(\mathfrak{q}, A/\mathfrak{p}) = e(\bar{\mathfrak{q}}, A/\mathfrak{p}), \quad \text{où } \bar{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{q} + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}.$$

En mettant ensemble on obtient le résultat pour  $M$ .

□

### 3.1.4 Une variante de la multiplicité de Hilbert-Samuel

Soit  $A$  un anneau local noethérien avec idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ,  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $G$  un groupe. Supposons que  $M$  soit muni d'une action de  $G$ . Soit  $\alpha$  un ensemble de représentations irréductibles de  $G$  sur un  $A/\mathfrak{m}$ -espace vectoriel de dimension finie. Plutôt que de considérer la longueur de  $M/\mathfrak{m}^{n+1}M$ , on peut considérer le nombre de facteurs de Jordan-Hölder de  $M/\mathfrak{m}^{n+1}M$  qui sont isomorphes à un élément de  $\alpha$ . On note ce nombre  $\chi_{M,\alpha}^A(n)$ .

**Proposition 3.1.15.** *Il existe un polynôme  $P_{M,\alpha}^A(n)$  de degré au plus  $d$  tel que  $\chi_{M,\alpha}^A(n) = P_{M,\alpha}^A(n)$  pour  $n$  suffisamment grand. Le coefficient de  $X^d$  dans  $P_{M,\alpha}^A(n)$  est de la forme  $e_{\alpha}(M, A/d!)$  où  $e_{\alpha}(M, A)$  est un entier non négatif.*

*Démonstration.* On démontre le théorème avec les mêmes arguments qu'on a vu ci-dessus. Nous remarquons que l'unique chose à montrer est que un tel polynôme existe, puisque le borne sur le degré suit du cas où  $G$  est trivial.  $\square$

**Proposition 3.1.16.** *Si*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

*est une suite exacte de  $A[G]$ -modules de type fini sur  $A$ , alors on a*

$$e_\alpha(M, A) = e_\alpha(M', A) + e_\alpha(M'', A)$$

*Démonstration.* La preuve est la même que celle donnée par le cas où  $G$  est trivial.  $\square$

On peut utiliser cette proposition pour prouver le résultat suivant qu'on utilisera dans la suite :

**Corollaire 3.1.17.** *Soient  $I', I$  et  $I''$  idéaux de  $A$  tels que les quotients  $A/I', A/I$  et  $A/I''$  aient même dimension. Supposons  $M', M$  et  $M''$  modules sur  $A/I', A/I$  et  $A/I''$  et vérifiant la condition de la Proposition 3.1.16. Alors on a*

$$e_\alpha(M, A/I) = e_\alpha(M', A/I') + e_\alpha(M'', A/I'').$$

*Démonstration.* On montre tout d'abord le fait suivant : soient  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$  tels que la dimension de  $A/I$  soit égal à la dimension de  $A/J$ . Alors on a  $\dim A/(I+J) = \dim A/I$ . Il suffit de montrer que  $\dim (I+J)/I$  est égal à 0. Supposons par absurd que  $\dim (I+J)/I = \dim (I+J)/J = n$ . On note  $\mathfrak{p}_0$  (resp.  $\mathfrak{q}_0$ ) le plus petit idéal premier de la chaîne maximal qui contient  $I$  (resp.  $J$ ). Alors  $\mathfrak{s} := \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{q}_0 \supset I \cap J$ , et comme il s'agit d'un idéal premier on a  $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{p}_0$  ou bien  $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{q}_0$  ce qui est absurde puisque  $\mathfrak{s}$  est strictement contenu dans  $\mathfrak{p}_0$  et  $\mathfrak{q}_0$ . Donc on a  $\dim A/I = \dim A/(I+I'+I'')$ . Cela entraîne  $e_\alpha(M, A/I) = e_\alpha(M, A/(I+I'+I''))$  et de la même façon pour  $M'$  et  $M''$ . On obtient finalement

$$e_\alpha(M, A/(I+I'+I'')) = e_\alpha(M', A/(I+I'+I'')) + e_\alpha(M'', A/(I+I'+I''))$$

pour la Proposition 3.1.16 et donc le résultat.  $\square$

**Proposition 3.1.18.** *Soit  $f : M \rightarrow M'$  une application de  $A[G]$ -modules de type fini sur  $A$ . Soit  $x \in A$  tel que  $M$  et  $M'$  n'ont pas de  $x$ -torsion.*

(1) *Si  $f$  est une inclusion, alors*

$$e_\alpha(M/xM, A/xA) \leq e_\alpha(M'/xM', A/xA).$$

(2) *Si  $f$  est un isomorphisme sur tout les points génériques de  $\text{Spec}(A)$ , alors*

$$e_\alpha(M/xM, A/xA) = e_\alpha(M'/xM', A/xA).$$

*Démonstration.* Soit  $P = \ker(f)$ . Si  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A/x) \supset \text{Spec}(A)$  est un idéal premier minimal de  $A/x$ , alors  $P_{\mathfrak{p}} = 0$ . C'est évident pour (1) car dans ce cas  $P = 0$ . Si dans le deuxième cas  $P_{\mathfrak{p}}$  n'était pas nul, alors  $\mathfrak{p}$  serait un idéal premier associé de  $P$  par [30, Théorème 6.5] et  $x \in \mathfrak{p}$  un diviseur de zéro de  $M$ . Donc  $e_{\alpha}(P/xP, A/xA) = 0$ , et on peut remplacer  $M$  par son image dans  $M'$ .

Soit  $Q$  le sous-module de  $M'/M$  des éléments qui sont tués par une puissance de  $x$ . Comme  $Q$  est noethérien il existe  $i > 0$  tel que  $x^i Q = 0$ . On obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow Q[x] \rightarrow Q \xrightarrow{x} Q \rightarrow Q/xQ \rightarrow 0.$$

Maintenant on utilise deux fois la Proposition 3.1.16 pour montrer la suite d'égalités suivantes :

$$e_{\alpha}(Q[x], A/xA) = e_{\alpha}(Q[x], A/x^i A) = e_{\alpha}(Q/xQ, A/x^i A) = e_{\alpha}(Q/xQ, A/xA).$$

En effet la suite exacte précédente entraîne :

$$(1) e_{\alpha}(Q[x], A/x^i A) + e_{\alpha}(xQ, A/x^i A) = e_{\alpha}(Q, A/x^i A)$$

$$(2) e_{\alpha}(xQ, A/x^i A) = e_{\alpha}(Q/xQ, A/x^i A) = e_{\alpha}(Q, A/x^i A)$$

et donc l'égalité au milieu, les autres deux étant triviales. Maintenant, si on note avec  $M''$  la preimage de  $Q$  dans  $M'$ , on obtient  $e_{\alpha}(M/xM, A/xA) = e_{\alpha}(M''/xM'', A/xA)$ . En effet de la suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow Q \rightarrow 0$ , on en déduit (après  $\otimes A/xA$ )

$$0 \rightarrow (M \cap xM'')/xM \rightarrow M/xM \rightarrow M''/xM \rightarrow Q/xQ \rightarrow 0$$

On peut vérifier directement que la multiplication  $x : M'' \rightarrow M''$  induit un isomorphisme

$$(M \cap xM'')/xM \rightarrow (M''/M)[x] =: Q[x]$$

d'où le résultat en utilisant 3.1.16. Donc on peut remplacer  $M$  par  $M''$  et on peut supposer  $M'/M$  sans  $x$ -torsion. Le point (1) suit alors de la Proposition 3.1.16. Un raisonnement analogue montre que sous les hypothèses de (2) on a  $e_{\alpha}(M'/(M + xM'), A/xA) = 0$ . Donc on a (2). □

**Corollaire 3.1.19.** *Soient  $M, M'$  des  $A[G]$ -modules de type fini sur  $A$ . Soit  $x \in A$  tel que  $M$  et  $M'$  soient sans  $x$ -torsion. Supposons que pour tout idéal premier minimal  $\mathfrak{p} \subset A$ ,  $M'_{\mathfrak{p}}$  contient  $M_{\mathfrak{p}}$  comme  $A_{\mathfrak{p}}[G]$ -modules. Alors*

$$e_{\alpha}(M/xM, A/xA) \leq e_{\alpha}(M'/xM', A/xA)$$

*Démonstration.* On note  $Q(A)$  le localisé de  $A$  par rapport à l'ensemble d'éléments qui ne sont pas dans tous les idéaux premiers minimaux de  $A$ . Les hypothèses entraînent qu'il existe une inclusion de  $Q(A)[G]$ -modules  $f : M \otimes_A Q(A) \rightarrow M' \otimes_A Q(A)$ . En multipliant

$f$  par un élément qui n'est pas dans tous les idéaux premiers de  $A$ , on peut supposer que  $f$  est induite par une application  $f : M \rightarrow M'$ . Soit  $M'' = f(M)$ . Alors, par la Proposition 3.1.18 on obtient

$$e_\alpha(M/xM, A/xA) = e_\alpha(M''/xM'', A/xA) \leq e_\alpha(M'/xM', A/xA).$$

□

## 3.2 Théorie des déformations de Mazur

Dans cette section on va introduire l'objet de base qui permet de définir la notion de multiplicité galoisienne. Nous donnerons le résultat principal de la théorie des déformations pour les représentations d'un groupe profini  $G$ , à savoir l'existence d'un anneau universel de déformation. Ensuite on définira des anneaux de déformation qui seront des quotients de l'anneau universel de déformation et qui seront importants dans la suite.

### 3.2.1 Le résultat principal

Soient  $G$  un groupe profini,  $\mathbb{F} \subseteq \overline{\mathbb{F}}_p$  un corps fini,  $V_{\mathbb{F}}$  un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel de dimension finie muni de la topologie discrète et d'une action continue de  $G$ . On suppose que  $H^1(G, \text{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}}))$  est de dimension finie sur  $\mathbb{F}$ , où l'action de  $G$  sur  $\text{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$  est donnée par  $(g \cdot f)(v) := g \cdot f(g^{-1} \cdot v)$ . Cette condition est vérifiée, par exemple, lorsque  $G$  est le groupe de Galois d'un corps local de corps résiduel fini.

Soit  $\mathcal{O}$  un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel fini, et  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -algèbres locales topologiques  $A$  telles que l'application naturelle  $\mathcal{O} \rightarrow A/\mathfrak{m}_A$  est surjective et l'application  $A \rightarrow \varprojlim A/\mathfrak{a}$  de  $A$  vers les quotients discrets artiniens est un isomorphisme. De manière équivalente, la deuxième condition dit que  $A$  est complet et sa topologie peut être donnée par une famille d'idéaux ouverts  $\mathfrak{a}$  tels que  $A/\mathfrak{a}$  soit artinien. Si  $A$  est noethérien, cette condition équivaut à avoir un isomorphisme topologique  $A \simeq \varprojlim A/\mathfrak{m}_A^n$ . Les morphismes dans  $\mathcal{C}$  sont les homomorphismes de  $\mathcal{O}$ -algèbres.

**Définition 3.2.1.** *Soit  $A \in \mathcal{C}$ ,  $\mathbb{F}$  son corps résiduel.*

- i. Une représentation de  $G$  sur  $A$ , ou une  $A$ -représentation de  $G$ , est un  $A$ -module libre  $V_A$  de type fini avec une action  $A$ -linéaire et continue de  $G$  (pour la topologie produit sur  $V_A \simeq A^n$ ).*
- ii. Une déformation de  $V_{\mathbb{F}}$  sur  $A$ , ou une  $A$ -déformation de  $V_{\mathbb{F}}$ , est une classe d'isomorphisme de  $A$ -représentations  $V_A$  de  $G$  telles que  $V_A \otimes A/\mathfrak{m}_A \simeq V_{\mathbb{F}}$ .*

On note  $D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$  l'ensemble des  $A$ -déformations de  $V_{\mathbb{F}}$ . Si  $f : A \rightarrow A'$  est un morphisme dans  $\mathcal{C}$  on obtient une application  $f_* : D_{V_{\mathbb{F}}}(A) \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}(A')$  qui à la classe d'une  $A$ -représentation  $V_A$  associe  $V_A \otimes_A A'$ . On a donc construit un foncteur contravariant  $D_{V_{\mathbb{F}}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ . On veut montrer qu'il est représentable lorsque  $\text{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ .

On rappelle la définition suivante :

**Définition 3.2.2.** Soit  $V$  une  $\mathbb{F}$ -représentation de  $G$ . On dit que  $V$  est absolument irréductible si  $V \otimes_{\mathbb{F}} K$  est un  $K[G]$ -module simple pour toute extension  $K$  de  $\mathbb{F}$ .

Choisissons une base  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  de  $V_{\mathbb{F}}$ . Alors l'action de  $G$  sur  $V_{\mathbb{F}}$  est donnée par un homomorphisme continu des groupes  $\bar{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ . Soit maintenant  $W$  une représentation de  $G$  sur  $A \in \mathcal{C}$  telle que  $W \otimes_{\mathbb{F}} A \simeq V_{\mathbb{F}}$ . Les éléments  $w_1, \dots, w_n \in W$  tels que  $w_i \mapsto v_i$  forment une  $A$ -base de  $W$  par le Lemme de Nakayama. L'action de  $G$  sur  $W$  est alors donnée par un homomorphisme continu de groupes  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(A)$  tel que la composition  $G \rightarrow \mathrm{GL}_n(A) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  soit  $\bar{\rho}$ . On note l'ensemble de ces applications  $\rho$  par  $\mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(A))$ .

**Proposition 3.2.3.** Il existe un anneau  $\tilde{R}$  et une application  $\tilde{\rho} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(A))$  tels que pour tout  $A \in \mathcal{C}$  on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{R}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(A)), \quad \tilde{f} \mapsto (G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\tilde{R}) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{GL}_n(A)).$$

La couple  $(\tilde{R}, \tilde{\rho})$  est déterminée à isomorphisme unique près.

*Démonstration.* L'unicité suit de la propriété universelle. Supposons d'abord que  $G$  soit un groupe fini, et  $e$  son élément neutre. On note  $\mathcal{O}[G, n]$  la  $\mathcal{O}$ -algèbre commutative donnée par :

$$\begin{aligned} \text{générateurs : } & X_{ij}^g && \text{pour } g \in G \text{ et } 1 \leq i, j \leq n; \\ \text{relations : } & X_{ij}^g = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j; \end{cases} \\ & X_{ij}^{gh} = \sum_{l=1}^n X_{il}^g X_{lj}^h && \text{pour } g, h \in G \text{ et } 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Par exemple  $\mathcal{O}[G, 1]$  est l'algèbre de groupe sur  $G^{\mathrm{ab}}$  à coefficients dans  $\mathcal{O}$ .

Pour toute  $\mathcal{O}$ -algèbre  $A$  on a une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\mathcal{O}[G, n], A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(G, \mathrm{GL}_n(A)), \quad f \mapsto (g \mapsto (f(X_{ij}^g))_{i,j}). \quad (3.2.4)$$

Pour la bijection 3.2.4, l'homomorphisme  $\bar{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  donne un morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres  $\mathcal{O}[G, n] \rightarrow \mathbb{F}$ . En particulier le noyau est un idéal maximal que on note  $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ . Soit  $\tilde{R}$  la completion de  $\mathcal{O}[G, n]$  par rapport à  $\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}$ . Alors  $\tilde{R}$  est noethérien et il est un objet de  $\mathcal{C}$ . L'application canonique  $\mathcal{O}[G, n] \rightarrow \tilde{R}$  donne un morphisme  $\tilde{\rho} \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(\tilde{R}))$ . Soit  $A \in \mathcal{C}$  et  $\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(A))$ . Pour 3.2.4, il existe un unique morphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres  $f : \mathcal{O}[G, n] \rightarrow A$  tel que  $\rho_f = \rho$  et on a  $f(\mathfrak{m}_{\bar{\rho}}) \subset \mathfrak{m}_A$  comme  $A/\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{F}$  et  $(f \circ \pi_A) = \bar{\rho}$ , où  $\pi_A : A \rightarrow A/\mathfrak{m}_A$  est la projection canonique. La topologie sur  $A$  est donnée par des idéaux ouverts  $\mathfrak{a}$  tels que  $A/\mathfrak{a}$  est artinien et l'application  $\mathcal{O}[G, n] \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{a}$

est continue pour la topologie  $\mathfrak{m}_{\tilde{\rho}}$ -adique sur  $\mathcal{O}[G, n]$  pour tout  $\mathfrak{a}$ . Donc on obtient un homomorphisme de  $\mathcal{O}$ -algèbres  $\tilde{f} : \tilde{R} \rightarrow A$  tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \mathrm{GL}_n(\tilde{R}) \\ \parallel & & \downarrow \tilde{f} \\ G & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}_n(A) \end{array}$$

commute. Comme les éléments  $\tilde{f}(X_{ij}^g)$  sont déterminés par  $\rho$ , et les  $X_{ij}^g$  engendrent une sous- $\mathcal{O}$ -algèbre dense de  $\tilde{R}$ , l'application  $\tilde{f}$  est uniquement déterminée par la condition de continuité et la commutativité du diagramme. Cela démontre la proposition dans le cas  $G$  groupe fini. Pour le cas général, on peut écrire  $G$  sous la forme suivante :  $G = \varprojlim H$ , où  $H$  parcourent les quotients discrets de  $G$  tels que la représentation  $\bar{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  se factorise à travers l'application  $\bar{\rho}_H : H \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ . Comme  $H$  est un groupe fini, on obtient un anneau  $R_H$  avec un homomorphisme des groupes  $\tilde{\rho}_H : H \rightarrow \mathrm{GL}_n(R_H) \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(R_H))$ . Les  $(R_H)_H$  dans  $\mathcal{C}$  forment un système projective. On pose  $\tilde{R} := \varprojlim R_H \in \mathcal{C}$ .

Soit  $A = \varprojlim A_i$ ,  $A \in \mathcal{C}$ , où les  $A_i$  sont les quotients discrets artiniens. On a les isomorphismes canoniques suivants

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(\tilde{A})) &\simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(\tilde{A}_i)) \\ &\simeq \varprojlim_i \varinjlim_H \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}_H}(G, \mathrm{GL}_n(\tilde{A}_i)) \\ &\simeq \varprojlim_i \varinjlim_H \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(R_H, A_i) \\ &\simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\tilde{R}, A_i) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{-alg}}(\tilde{R}, A). \end{aligned}$$

On peut donc conclure. □

**Remarque 3.2.5.** *Supposons que  $V_{\mathbb{F}}$  soit absolument irréductible. Alors on a :*

$$\overline{\mathbb{F}}_p = \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}_p) \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(V_{\mathbb{F}}) \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Donc  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(V_{\mathbb{F}}) \simeq \mathbb{F}$ .

**Lemme 3.2.6.** *(Serre, Carayol) Supposons que  $V_{\mathbb{F}}$  soit absolument irréductible. Soit  $A' \subset A$  une inclusion d'anneaux dans  $\mathcal{C}$  tel que  $A'$  soit muni de la topologie induite par  $A$  et  $V_A \in D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ . Supposons que  $A'$  contienne les traces de tous les endomorphismes de  $V_A$  qui sont donnés par la multiplication par un élément de  $G$ . Alors il existe  $V_{A'} \in D_{V_{\mathbb{F}}}(A')$  tel que  $V_A \simeq V_{A'} \otimes_{A'} A$ .*

*Démonstration.* Voir [17, Proposition 2.6].  $\square$

**Corollaire 3.2.7.** *Supposons que  $V_{\mathbb{F}}$  soit absolument irréductible. Alors il existe un anneau  $R \in \mathcal{C}$  et une déformation  $D \in D_{V_{\mathbb{F}}}(R)$  tels que pour chaque  $A \in \mathcal{C}$ , on ait une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \xrightarrow{\sim} D_{V_{\mathbb{F}}}(A), \quad f \mapsto D \otimes_{R,f} A.$$

*Démonstration.* On note  $R$  la plus petite sous- $\mathcal{O}$ -algèbre fermée de  $\tilde{R}$  que contient les traces de toutes les matrices  $\tilde{\rho}(g)$  pour  $g \in G$ . Alors  $R \in \mathcal{C}$  et par le Lemme 3.2.6 on peut supposer  $\tilde{\rho}$  à coefficients sur  $R$ . On note  $D$  la déformation correspondante de  $V_{\mathbb{F}}$  sur  $R$ . On doit montrer que la flèche  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$  est injective et surjective. La surjectivité provient de la Proposition 3.2.3 et du fait que on peut toujours trouver une base pour chaque élément de  $D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$  à partir d'une base fixée de  $V_{\mathbb{F}}$  comme déjà montré avec l'argument avant 3.2.3. Supposons que  $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A)$  donnent représentations isomorphes. Alors elles ont la même trace. Donc  $f$  et  $f'$  coïncident sur un sous-anneau dense de  $R$  et donc sur  $R$  par continuité.  $\square$

On veut prouver le même résultat sous l'hypothèse suivante :  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ . Maintenant le Lemme 3.2.6 n'est plus vrai. Il faudra considérer un autre sous-anneau de  $\tilde{R}$ . On fixe une base de  $V_{\mathbb{F}}$ . Comme  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ , on peut choisir  $g_1, \dots, g_r \in G$  tels que les matrices de  $M_n(\mathbb{F})$  qui commutent avec  $\bar{\rho}(g_1), \dots, \bar{\rho}(g_r)$  sont seulement celles scalaires. On fixe  $M_1, \dots, M_r \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$  qui relèvent  $\bar{\rho}(g_1), \dots, \bar{\rho}(g_r)$ . Pour tout  $A \in \mathcal{C}$ , on pose  $M_n^0(A) := M_n(A)/A$ . On a  $M_n^0(A) = M_n^0(\mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} A$ . Par le Lemme de Nakayama on voit que il y a une injection scindée de  $\mathcal{O}$ -modules :

$$i_{\mathcal{O}} : M_n^0(\mathcal{O}) \hookrightarrow M_n(\mathcal{O})^r, \quad M \mapsto (MM_i - M_iM)_{1 \leq i \leq r}.$$

On choisit  $\pi_{\mathcal{O}} : M_n(\mathcal{O})^r \rightarrow M_n^0(\mathcal{O})$  tel que  $\pi_{\mathcal{O}} \circ i_{\mathcal{O}} = \mathrm{id}_{M_n^0(\mathcal{O})}$ . En tensorisant avec  $A$ , on obtient une injection  $i_A : M_n^0(A) \hookrightarrow M_n(A)^r$  et une surjection  $\pi_A : M_n(A)^r \rightarrow M_n^0(A)$  tels que  $\pi_A \circ i_A = \mathrm{id}_{M_n^0(A)}$ .

**Définition 3.2.8.** (*Faltings*) *On dit que  $\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(A))$  est well-placed si*

$$\pi_A(\rho(g_1), \dots, \rho(g_r)) = \pi_A(M_1, \dots, M_r).$$

**Lemme 3.2.9.** (*Faltings*) *Pour tout  $\rho \in \mathrm{Hom}_{\bar{\rho}}(G, \mathrm{GL}_n(A))$  il existe  $M \in \mathrm{GL}_n(A)$  congru à  $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  tel que  $M\rho M^{-1}$  est well-placed. D'ailleurs  $M$  est uniquement déterminée modulo multiplication par scalaires dans  $\mathbf{1} + \mathfrak{m}_A$ .*

*Démonstration.* Voir [17, Lemme 7.3].  $\square$

**Corollaire 3.2.10.** *Supposons que  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ . Alors il existe un anneau  $R \in \mathcal{C}$  et une déformation  $D \in D_{V_{\mathbb{F}}}(R)$  tels que pour chaque  $A \in \mathcal{C}$ , on ait une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \xrightarrow{\sim} D_{V_{\mathbb{F}}}(A), \quad f \mapsto D \otimes_{R,f} A.$$

*Démonstration.* Par le Lemme 3.2.9, on pose  $\rho = M\tilde{\rho}M^{-1}$ ,  $\rho$  *well-placed*. On note  $R$  la plus petite sous- $\mathcal{O}$ -algèbre fermée de  $\tilde{R}$  que contient toutes les entrées des matrices  $\rho(g)$  pour  $g \in G$ . Alors  $R \in \mathcal{C}$  et on peut supposer  $\tilde{\rho}$  à coefficients sur  $R$ . On note  $D$  la déformation correspondante de  $V_{\mathbb{F}}$  sur  $R$ . On doit montrer que la flèche  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$  est injective et surjective. La surjectivité provient de la Proposition 3.2.3. Supposons que  $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A)$  donnent représentations isomorphes. Alors :

$$\rho_1, \rho_2 : G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(R) \xrightarrow{f_1, f_2} \mathrm{GL}_n(A)$$

sont *well-placed* et conjuguées. Par unicité de  $M$  en Lemme 3.2.9, on a  $\rho_1 = \rho_2$  et donc  $f_1 = f_2$  par définition de  $R$ . □

Enfin, on a :

**Proposition 3.2.11.** *Supposons que  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ . Alors l'anneau  $R$  du Corollaire 3.2.10 est noethérien, complet pour la topologie  $\mathfrak{m}_R$ -adique et, pour chaque  $A \in \mathcal{C}$ , on a une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \xrightarrow{\sim} D_{V_{\mathbb{F}}}(A).$$

*Démonstration.* Montrons que  $R$  est noethérien. Le reste suit par des arguments d'algèbre commutative e du Corollaire 3.2.10. On peut vérifier que le  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, \mathbb{F}[X]/X^2)$  est de dimension finie si et seulement si  $R$  est noethérien. Or, par le Corollaire 3.2.10, on a  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, \mathbb{F}[X]/X^2) \simeq D_{V_{\mathbb{F}}}(\mathbb{F}[X]/X^2)$ . Il suffit de prouver que le membre à droite est de dimension finie sur  $\mathbb{F}$ . Comme  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[X]/X^2}(V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[X]/X^2) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}}) \oplus X\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$  on obtient  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}[X]/X^2}(V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[X]/X^2) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}}) \oplus X\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$ . Donc tout élément de  $D_{V_{\mathbb{F}}}(\mathbb{F}[X]/X^2)$  on peut l'écrire comme une flèche  $G \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}}) \oplus X\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$ ,  $g \mapsto (1 + c(g)X)\bar{\rho}(g)$  où  $c : G \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}})$  est un 1-cocycle continu. En utilisant  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$  on peut vérifier que deux telles flèches définissent la même déformation si et seulement si les deux cocycles sont cohomologues. L'hypothèse  $H^1(G, \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_{\mathbb{F}}))$  de dimension finie, permet de conclure. □

On peut alors résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2.12.** *Supposons que  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ .*

- i. Il existe un anneau  $R \in \mathcal{C}$  et une déformation  $D \in D_{V_{\mathbb{F}}}(R)$  tels que pour chaque  $A \in \mathcal{C}$ , on ait une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \xrightarrow{\sim} D_{V_{\mathbb{F}}}(A), \quad f \mapsto D \otimes_{R, f} A.$$

- ii. Le couple  $(R, D)$  est unique à isomorphisme près.*

iii. L'anneau  $R$  est noethérien, complet pour la topologie  $\mathfrak{m}_R$ -adique et, pour chaque  $A \in \mathcal{C}$ , on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, A) \xrightarrow{\sim} D_{V_{\mathbb{F}}}(A).$$

**Remarque 3.2.13.** Le point (ii) du Théorème 3.2.12 suit par arguments d'unicité des objets universels.

### 3.3 La multiplicité galoisienne

On fixe une représentation continue :

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$$

telle que  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}[G_{\mathbb{Q}_p}]}(\bar{\rho}) = \mathbb{F}$ . Fixons  $k$  un entier  $> 1$ ,  $E$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  d'anneau d'entiers  $\mathcal{O}$  et de corps résiduel  $\mathbb{F}$ ,  $\tau$  un type galoisien de degré 2. On note  $R(\bar{\rho})$  la  $\mathcal{O}$ -algèbre universelle notée  $R$  dans le Théorème 3.2.12. On suppose que  $\tau$  est rationnel sur  $E$ , à savoir  $\tau$  se factorise à travers  $I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ , et que  $\bar{\rho}$  est rationnel sur  $\mathbb{F}$ . Rappelons que  $I_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{sauv}} \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}})$  désigne le sous groupe d'inertie sauvage dans  $I_{\mathbb{Q}_p}$ .

**Définition 3.3.1.** On dit qu'une déformation  $\rho$  de  $\bar{\rho}$  à l'anneau des entiers  $\mathcal{O}'$  d'une extension finie  $E'$  de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  est de type  $(k, \tau, \psi)$  si :

- (i)  $\rho \otimes_{\mathcal{O}'} \overline{\mathbb{Q}_p}$  est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate  $(0, k-1)$ ,
- (ii)  $\mathrm{WD}(\rho \otimes_{\mathcal{O}'} \overline{\mathbb{Q}_p})|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \tau$ , où  $\mathrm{WD}(\rho \otimes_{\mathcal{O}'} \overline{\mathbb{Q}_p})$  est la représentation de Weil-Deligne associée à  $\rho \otimes_{\mathcal{O}'} \overline{\mathbb{Q}_p}$ ,
- (iii)  $\det(\rho) = \psi \chi_{\mathrm{cyc}}$ .

**Définition 3.3.2.** On dit qu'un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $R(\bar{\rho})$  est de type  $(k, \tau, \psi)$  s'il existe un morphisme continu de  $\mathcal{O}$ -algèbres  $i : R(\bar{\rho}) \rightarrow \overline{\mathbb{Z}_p}$  de noyau  $\mathfrak{p}$  tel que la déformation  $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Z}_p})$  obtenue par composition à partir de la déformation universelle  $\rho^{\mathrm{univ}} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(R(\bar{\rho}))$  :

$$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\rho^{\mathrm{univ}}} \mathrm{GL}_2(R(\bar{\rho})) \xrightarrow{i} \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Z}_p})$$

soit de type  $(k, \tau, \psi)$ .<sup>1</sup>

**Définition 3.3.3.** On définit  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) = 0$  s'il n'y a pas d'idéal  $\mathfrak{p}$  de type  $(k, \tau, \psi)$ . Sinon, on définit  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  comme le quotient de  $R(\bar{\rho})$  par l'intersection des idéaux premiers de type  $(k, \tau, \psi)$ .

1. Dans [10] on utilise le fait que  $\tau$  est rationnelle pour déduire que si  $\mathfrak{p}$  est de type  $(k, \tau, \psi)$ , alors tout morphisme  $R(\bar{\rho}) \rightarrow \overline{\mathbb{Z}_p}$  de noyau  $\mathfrak{p}$  est tel que la déformation associée est de type  $(k, \tau, \psi)$

**Remarque 3.3.4.** *On montre que  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est une  $\mathcal{O}$ -algèbre plate locale noethérienne complète réduite de corps résiduel  $\mathbb{F}$ .*

Kisin a montré que le quotient  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  vérifie les propriétés suivantes (cf. [25, Théorème 3.3.8]) :<sup>2</sup>

- i. Un  $\mathcal{O}$ -morphisme  $x : R(\bar{\rho}) \rightarrow E'$  se factorise par  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  si et seulement si la représentation  $V_x$  à coefficients dans  $E'$  est potentiellement semi-stable de type  $(k, \tau, \psi)$ .
- ii.  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est sans  $p$ -torsion,  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})[1/p]$  est réduit et ses composantes irréductibles sont toutes de dimension 1 et lisses sur  $\mathcal{O}$ .

On note  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathcal{O}}$  le quotient que on a précédemment défini. On a le résultat suivant :

**Lemme 3.3.5.** *Si on remplace  $\mathcal{O}$  par  $\mathcal{O}'$  tel que  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ , alors  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathcal{O}}$  est remplacé par  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$ .*

*Démonstration.* Voir cf. [10, Lemme 2.2.2.3]. □

On rappelle que si  $A$  est une  $\mathbb{F}$ -algèbre locale noethérienne, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et  $M$  un  $A$ -module de type fini, il existe un polynôme  $P_M^A(x)$  de degré la dimension de Krull de  $A$ , tel que  $P_M^A(n) = \text{long}_A(M/\mathfrak{m}^{n+1}M)$  pour  $n \gg 0$ . Il a la forme

$$P_M^A(n) = \frac{e(M, A)}{\dim(A)!} X^{\dim A} + \{\text{termes de degré plus petit}\}$$

où  $e(M, A)$  est un entier strictement positif (si  $A$  est non nul) : la multiplicité de Hilbert-Samuel.

En particulier, si  $A = R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}$  et  $M = A$ , on définit la multiplicité galoisienne  $\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho})$ , de la façon suivante :

$$\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho}) := e\left(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}\right).$$

Autrement dit  $\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho})$  est la multiplicité d'Hilbert-Samuel de l'anneau local  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}$ . C'est bien définie parce que, si  $E'$  est une extension finie de  $E$ , alors :

$$e(R(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathbb{F}) = e(R(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} \mathbb{F}')$$

grâce au Lemme 3.3.5.

---

2. En effet il a montré l'existence de ces quotients et leurs propriétés dans une situation plus générale [25].

### 3.4 La multiplicité automorphe

Le point de départ pour définir la multiplicité automorphe est la correspondance de Langlands locale pour  $n = 2$  et  $F$  un corps local non archimédien à corps résiduel fini. D'abord on va définir les outils qui vont intervenir et après on donne l'énoncé du théorème qui établit une correspondance entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations complexes lisses de dimension 2 de Weil-Deligne, semi-simples, et l'ensemble de classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(F)$ .

On note  $\mathcal{O}_F$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\mathfrak{m}_F$  son idéal maximal et  $k_F$  son corps résiduel que l'on suppose de caractéristique  $p$ . On fixe  $\overline{F}$  une clôture algébrique de  $F$ . On note  $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$  et  $G = \mathrm{GL}_2(F)$ .

On rappelle que si  $k$  est une extension finie séparable de  $k_F$ , il existe une unique extension non ramifiée  $F(k)$  de  $F$  dont le corps résiduel est  $k$ . Comme la composée de deux extensions non ramifiée est non ramifiée, l'extension maximale non ramifiée  $F^{\mathrm{nr}}$  de  $F$ , réunion de toutes les extensions non ramifiées de  $F$ , est un sous-corps de  $\overline{F}$ . On note  $F_m$  l'unique extension non ramifiée de degré  $m$ . L'extension  $F_m/F$  est de Galois et  $\mathrm{Gal}(F_m/F)$  est cyclique. Un  $F$ -automorphisme de  $F_m$  est déterminé par l'action sur le corps résiduel  $k_{F_m}$ . En particulier il y a un unique élément  $\phi_m$  qui agit sur  $k_{F_m}$  par  $x \mapsto x^p$ . On pose  $\Phi_m = \phi_m^{-1}$ . La flèche  $\Phi_m \mapsto 1$  donne un isomorphisme canonique  $\mathrm{Gal}(F_m/F) \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . En passant à la limite projective on obtient un isomorphisme canonique de groupes topologiques

$$\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}) \simeq \varprojlim_{m \geq 1} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

et un unique élément  $\Phi_F \in \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$  qui agit sur  $F_m$  par  $\Phi_m$ , pour tout  $m$ . L'élément  $\Phi_F$  est le *Frobenius Géométrique* sur  $F^{\mathrm{nr}}$ .

On note  ${}_a\mathcal{W}_F$  l'image inverse dans  $G_F$  du sous-groupe cyclique  $\langle \Phi_F \rangle$  de  $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$  engendré par  $\Phi_F$ . Donc  ${}_a\mathcal{W}_F$  est un sous-groupe dense de  $G_F$  et on a la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_F \rightarrow {}_a\mathcal{W}_F \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{I}_F$  est le sous-groupe d'inertie de  $F$ .

**Définition 3.4.1.** *Le groupe de Weil  $\mathcal{W}_F$  de  $F$  est le groupe topologique, avec groupe abstrait sous-jacent  ${}_a\mathcal{W}_F$ , tel que*

- i.  $\mathcal{I}_F$  est un sous-groupe ouvert de  $\mathcal{W}_F$ , et*
- ii. La topologie sur  $\mathcal{I}_F$ , vu comme sous-espace de  $\mathcal{W}_F$ , coïncide avec la topologie naturelle induite par  $G_F$ .*

Donc  $\mathcal{W}_F$  est un groupe profini, et l'application identité  $i_F : {}_a\mathcal{W}_F \rightarrow \mathcal{W}_F$  est une injection continue.

On note  $v_F : \mathcal{W}_F \rightarrow \mathbb{Z}$  la flèche canonique telle que  $\Phi_F \mapsto 1$  et, si  $q$  est la cardinalité de  $k_F$  :

$$\|x\| = q^{-v_F(x)}, \quad x \in \mathcal{W}_F.$$

On rappelle un résultat classique de théorie de représentation :

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $G$  un groupe profini et  $(\pi, V)$  une représentation lisse de  $G$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i.  $V$  est somme de sous-espaces irréductibles stables par  $G$  ;
- ii.  $V$  est somme directe d'une famille de sous-espaces irréductibles stables par  $G$  ;
- iii. Tout sous espace de  $V$  stable par  $G$  possède un complément dans  $V$  stable par  $G$ .

*Démonstration.* Voir [11, Proposition 2.2]. □

On dit que  $(\pi, V)$  est  $G$ -semi-simple si les conditions de la Proposition 3.4.2 sont satisfaites.

**Définition 3.4.3.** *Une Représentation de Weil-Deligne est un triplet  $(\rho, V, N)$  où  $(\rho, V)$  est une représentation lisse de dimension finie de  $\mathcal{W}_F$  et  $N \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  est un endomorphisme nilpotent tel que*

$$\rho(x)N\rho(x)^{-1} = \|x\|N, \quad x \in \mathcal{W}_F.$$

*Une représentation de Weil-Deligne  $(\rho, V, N)$  est dite semi-simple si la représentation lisse  $(\rho, V)$  de  $\mathcal{W}_F$  est semi-simple.*

**Correspondance de Langlands Locale :** On note  $\mathcal{G}_F(2)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations complexes lisses de dimension 2 de Weil-Deligne semi-simple. On note  $\mathcal{A}_F(2)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de  $G$ . Il y a une bijection canonique entre les deux classes (cf. [24],[28]). Si  $\pi$  est une représentation lisse irréductible de  $G$  on note  $\text{LL}(\pi)$  la représentation correspondante.

En particulier la construction précédente s'applique au cas  $F = \mathbb{Q}_p$ .

**Théorème 3.4.4.** (Henniart). *Soit  $\tau$  un type galoisien de degré 2. Il existe, à isomorphisme près, une et une seule représentation finie irréductible de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  (sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  par exemple), notée  $\sigma(\tau)$ , telle que, pour toute représentation lisse irréductible  $\pi$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  de dimension infinie :*

$$\pi|_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} \text{ contient } \sigma(\tau) \Leftrightarrow \text{LL}(\pi)|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \tau.$$

*De plus,  $\sigma(\tau)$  intervient alors dans  $\pi|_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}$  avec multiplicité 1.*

*Démonstration.* Voir [10, Théorème 2.1.1.3].  $\square$

On peut supposer que  $\sigma(\tau)$  soit définie sur  $E$  (quitte à agrandir  $E$ ). On montre le résultat suivant qui va être utile par la suite :

**Proposition 3.4.5.** *Toute  $\mathbb{Q}_p$ -représentation d'un groupe compact  $G$  admet un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau stable par  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $V$  sur  $\mathbb{Q}_p$  et soit  $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}_p}e_1 \oplus \dots \oplus \overline{\mathbb{Z}_p}e_d$ . Si  $\sigma \in G$ , soit  $U_\sigma = (a_{i,j,\sigma})_{1 \leq i,j \leq d}$  la matrice de  $\sigma$  dans la base  $e_1, \dots, e_d$  (c'est à dire  $\sigma(e_i) = \sum_{j=1}^d a_{j,i} e_j$ ). L'application  $\sigma \rightarrow U_\sigma$  étant continue et  $G$  étant compact, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a_{i,j,\sigma} \in p^{-n}\mathbb{Z}_p$  quels que soient  $1 \leq i, j \leq d$  et  $\sigma \in G$ . On a donc  $\sigma(\Lambda) \subset p^{-n}\Lambda$ , pour tout  $\sigma \in G$ , ce qui implique que  $T = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\Lambda)$  est un réseau de  $V$ ; comme il est stable par  $G$  par construction, cela permet de conclure  $\square$

Soit maintenant  $k$  un entier  $> 1$  et posons :

$$\sigma(k, \tau) := \sigma(\tau) \otimes_E \text{Sym}^{k-2}(E).$$

C'est une représentation linéaire de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  continue pour la topologie p-adique de dimension finie sur  $E$ . Comme  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  est un groupe compact, il existe un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $\sigma(k, \tau)$  stable par  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ,  $L_{k,\tau}$  pour la Proposition 3.4.5. La semi-simplifiée  $(L_{k,\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F})^{\text{ss}}$  de la réduction modulo l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}$  d'un des ces réseaux est indépendante du réseau choisi (Brauer-Nesbitt).

Comme on a déjà vu dans le Corollaire 2.3.6, tout poids est, à isomorphisme près, de la forme  $\sigma_{n,m} = \text{Sym}^n(\mathbb{F}^2) \otimes \det^m$  avec  $0 \leq n \leq p-1$  et  $0 \leq m < p-1$ . Donc on a

$$(L_{k,\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F})^{\text{ss}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n,m} \sigma_{n,m}^{a(n,m)}$$

où  $0 \leq n \leq p-1$  et  $0 \leq m < p-1$ .

On pose

$$\mu_{\text{aut}} = \mu_{\text{aut}}(k, \tau, \bar{\rho}) := \sum_{n,m} a(n,m) \mu_{m,n}(\bar{\rho})$$

où  $\mu_{(n,m)}(\bar{\rho})$  est un entier non négatif que l'on va définir après avoir énoncé la conjecture de Breuil-Mézard.

**Conjecture 3.4.6.** *(Breuil-Mézard, Kisin) La multiplicité de Hilbert-Samuel de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}$  est égale à  $\mu_{\text{aut}}$ .*

On suppose que l'on peut mettre  $\bar{\rho}$  sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \chi^\beta \mu_\lambda & * \\ 0 & \chi^\alpha \mu_{\lambda'} \end{pmatrix}$$

où  $\mu_\lambda$  (resp.  $\mu_{\lambda'}$ ) est le caractère non ramifié définie par  $\text{Frob.} \mapsto \lambda$  (resp.  $\text{Frob.} \mapsto \lambda'$ ). La restriction de  $\bar{\rho}$  à  $I_{\mathbb{Q}_p}$  est donc :

$$\bar{\rho}|_{I_{\mathbb{Q}_p}} = \begin{pmatrix} \chi^\beta & * \\ 0 & \chi^\alpha \end{pmatrix}$$

On normalise les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  par :

$$0 \leq \alpha \leq p-2 \quad \text{et} \quad 1 \leq \beta \leq p-1.$$

Si  $\beta = \alpha + 1$  on a deux cas possibles que on appellera respectivement *peu ramifié* et *très ramifié*. On les définit de la manière suivante :

Le groupe  $\bar{\rho}(I_{\mathbb{Q}_p})$  est le groupe de Galois d'une certaine extension totalement ramifiée  $K$  de  $\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$ , et le groupe  $\bar{\rho}(I_{\mathbb{Q}_p}^{\text{saUV}})$  est le groupe de Galois de  $K/K^{\text{mr}}$ , où  $K^{\text{mr}}$  est la plus grande extension modérément ramifiée de  $\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$  contenue dans  $K$ .

Du fait que  $\beta = \alpha + 1$  et en utilisant la théorie de Kummer, on en déduit que  $K$  peut s'écrire sous la forme :

$$K = K^{\text{mr}}(x_1^{1/p}, \dots, x_m^{1/p}), \quad \text{où} \quad p^m = [K : K^{\text{mr}}],$$

les  $x_i$  étant des éléments de  $(\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})^\times / (\mathbb{Q}_p^{\text{nr}})^\times{}^p$  (cf. [31, pag. 186]). Si  $v_p$  désigne la valuation de  $\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$ , normalisée par  $v_p(p) = 1$ , nous dirons que l'extension  $K$  (où la représentation  $\bar{\rho}$ ) est *peu ramifiée* si

$$v_p(x_i) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, m.$$

Dans le cas contraire, nous dirons que  $K$  et  $\bar{\rho}$  sont *très ramifiées*.

On note  $\omega$  le caractère cyclotomique modulo  $p$  et  $\omega_2$  le caractère fondamentale de niveau 2.

**Définition 3.4.7.** *On suppose que  $\bar{\rho}$  est absolument irréductible. Pour  $(n, m) \in \{0, 1, \dots, p-1\} \times \{0, 1, \dots, p-2\}$  on pose :*

i.  $\mu_{n,m}(\bar{\rho}) = 1$  si

$$\bar{\rho}|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} \omega_2^{n+1} & * \\ 0 & \omega_2^{p(n+1)} \end{pmatrix} \otimes \omega^m;$$

ii.  $\mu_{n,m}(\bar{\rho}) = 0$  sinon.

**Définition 3.4.8.** *Supposons que  $\bar{\rho}$  est réductible. Si*

$$\bar{\rho} \simeq \begin{pmatrix} \omega^{n+1}\mu_\lambda & * \\ 0 & \mu_{\lambda'} \end{pmatrix} \otimes \omega^m$$

on pose  $\mu_{n,m}(\bar{\rho}) = 0$ .

Si

$$\bar{\rho} \sim \begin{pmatrix} \omega^{n+1}\mu_\lambda & * \\ 0 & \mu_{\lambda'} \end{pmatrix} \otimes \omega^m$$

on pose :

- i.*  $\mu_{p-1,m}(\bar{\rho}) = 2$  si  $n = p - 1$ ,  $\lambda = \lambda'$ , et  $*$  est peu ramifié;
- ii.*  $\mu_{0,m}(\bar{\rho}) = 0$  si  $n = 0$ ,  $\lambda = \lambda'$ , et  $*$  est très ramifié;
- iii.*  $\mu_{p-2,m}(\bar{\rho}) = 2$  si  $n = p - 2$ ,  $\bar{\rho}$  est semi-simple et  $\lambda \neq \lambda'$ ; <sup>3</sup>
- iv.*  $\mu_{n,m}(\bar{\rho}) = 1$  sinon.

---

3. On ne explicite pas le cas  $\lambda = \lambda'$

## Chapitre 4

# Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en caractéristique $p$

Dans ce chapitre on va étudier certaines représentations admissibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  qui sont construites à partir des représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$  en caractéristique  $p$ , et les représentations correspondantes de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  obtenues en appliquant le foncteur  $\mathcal{V}$  de Colmez.

On fixe un entier  $r \in [0, p-1]$ . On note  $\sigma$  la représentation  $\mathrm{Sym}^r \mathbb{F}^2$  de  $KZ$ , sur laquelle  $Z$  opère trivialement. On fixe aussi un caractère  $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}^\times$  et  $\lambda \in \mathbb{F}$ . On note  $T_r$  l'opérateur de Hecke qui agit sur  $I(\sigma) = \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathrm{Sym}^r \mathbb{F}^2$  et donc sur  $I_\chi(\sigma) = I(\sigma) \otimes \chi \circ \det$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{F}$  on va noter  $S := T_r - \lambda$ . On pose

$$\Pi(r, \lambda, \chi) := \varprojlim I_\chi(\sigma) / S^n I_\chi(\sigma).$$

Enfin, on note  $\alpha$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ .

**Remarque 4.0.1.** *i. La  $G$ -représentation  $\Pi(r, \lambda, \chi)$  est un module sur  $\mathbb{F}[[S]]$ .*

*ii. La limite projective est exacte sur la catégorie des représentations de longueur finie. En particulier on a :*

$$\Pi(r, \lambda, \chi) / S^n \xrightarrow{\sim} I_\chi(\sigma) / S^n.$$

*iii. On peut appliquer le foncteur  $\mathcal{V}$  de Colmez à  $I_\chi(\sigma) / S^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On définit :*

$$\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi)) := \varprojlim \mathcal{V}(I_\chi(\sigma) / S^n).$$

*Par functorialité,  $S$  opère sur l'espace  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$ .*

**Lemme 4.0.2.** *L'induite  $I(\sigma)$  est sans  $S$ -torsion.*

*Démonstration.* L'induite  $I(\sigma)$  s'identifie aux fonctions sur l'arbre de Bruhat-Tits, à support compact et à valeurs dans la représentation  $\sigma$ . Pour chaque  $f \in I(\sigma)$  vue comme fonction sur l'arbre de Bruhat-Tits, si  $f$  est non-nulle, alors le support de  $Sf$  contient les sommets liés aux extrémités du support de  $f$ , donc  $Sf$  ne peut pas être nulle. On en conclut que  $I_\chi(\sigma)$  est sans  $S$ -torsion.  $\square$

**Lemme 4.0.3.** *Le  $\mathbb{F}[[S]]$ -module  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$  est libre de rang 1 si  $\lambda \neq 0$ , de rang 2 si  $\lambda = 0$ .*

*Démonstration.* Comme le foncteur  $\mathcal{V}$  est exact on a :

$$\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))/S\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(\pi(r, \lambda, \chi)).$$

Par le Théorème 2.7.8, la dimension de  $\mathcal{V}(\pi(r, \lambda, \chi))$  sur  $\mathbb{F}$  est égal à 1 si  $\lambda \neq 0$ , 2 si  $\lambda = 0$ . Dans la suite on traite le cas  $\lambda \neq 0$ , en notant que la même démonstration marche pour  $\lambda = 0$ . Comme  $\mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/SI_\chi(\sigma))$  est isomorphe à  $\mathcal{V}(I_\chi(\sigma))/\mathcal{V}(SI_\chi(\sigma))$  qui est de dimension 1 sur  $\mathbb{F}$ , on peut choisir  $e \in \mathcal{V}(I_\chi(\sigma))$  tel que  $\bar{e} \in \mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/SI_\chi(\sigma))$  soit une base de  $\mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/SI_\chi(\sigma))$ . Donc on obtient une application  $S$ -linéaire pour tout  $n \geq 1$  :

$$\phi_n : \mathbb{F}[[S]]/S^n\mathbb{F}[[S]] \rightarrow \mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/SI_\chi(\sigma))$$

définie par  $f \mapsto f(S)e$ . On va montrer par récurrence que l'application  $\phi_n$  est un isomorphisme pour tout  $n$ . Le cas  $n = 1$  est connu. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^{n-1}\mathbb{F}[[S]]/S^n & \longrightarrow & \mathbb{F}[[S]]/S^n & \longrightarrow & \mathbb{F}[[S]]/S^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \psi \downarrow & & \phi_n \downarrow & & \phi_{n-1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{V}(S^{n-1}I_\chi(\sigma)/S^n) & \longrightarrow & \mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/S^n) & \longrightarrow & \mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où l'application  $\psi$  est donnée par  $\psi(S^{n-1}f) = f(S)(S^{n-1}e)$ . Par l'hypothèse de récurrence, l'application  $\phi_{n-1}$  est un isomorphisme. Il suffit de montrer que  $\psi$  est un isomorphisme. Mais on a aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}[[S]]/S & \xrightarrow{\phi_1} & \mathcal{V}(I_\chi(\sigma)/S) \\ S^{n-1} \downarrow & & \mathcal{V}(S^{n-1}) \downarrow \\ S^{n-1}\mathbb{F}[[S]]/S^n & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{V}(S^{n-1}I_\chi(\sigma)/S^n) \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'application à gauche est un isomorphisme et  $\phi_1$  est un isomorphisme. Donc il suffit de montrer que l'application à droite est un isomorphisme. Or, cette application est induite par l'application  $I_\chi(\sigma)/SI_\chi(\sigma) \rightarrow S^{n-1}I_\chi(\sigma)/S^nI_\chi(\sigma)$  définie par  $v \mapsto S^{n-1}v$ . Comme  $I_\chi(\sigma)$  est sans  $S$ -torsion il s'agit d'un isomorphisme. Donc

$\mathcal{V}(S^{n-1})$  est bien un isomorphisme.

En passant à la limite on voit que  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$  est un  $\mathbb{F}[[S]]$ -module libre de rang 1.  $\square$

**Proposition 4.0.4.** *Soient  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  et  $a_p \in \overline{\mathbb{Z}}_p$  de valuation strictement positive. On a :*

$$(T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbb{Z}}_p^2) \subset (T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbb{Q}}_p^2) \cap (T - a_p)(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbb{Z}}_p^2),$$

*cette inclusion étant une égalité si et seulement si  $k \leq p + 1$ .*

*Démonstration.* Voir [5, Proposition 3.3.3]  $\square$

**Théorème 4.0.5.** *Dans les notations du Lemme 4.0.3, on a que  $\mathcal{V}(\Pi(r, 0, \chi))$  est une déformation à  $\mathbb{F}[[T]]$  de la représentation  $\mathcal{V}(\pi(r, 0, \chi))$  de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ , absolument irréductible et de dimension 2 sur  $\mathbb{F}$ . Si  $R$  est l'anneau universel des déformations de cette représentation, on a une application  $R \rightarrow \mathbb{F}[[T]]$  qui est surjective.*

*Démonstration.* (Esquisse de preuve)

On peut supposer  $\chi$  trivial. La première partie du théorème découle immédiatement du Lemme 4.0.3. Pour prouver la deuxième partie supposons d'abord  $r \in [0, p - 2]$ . On désigne par  $E$  une extension finie totalement ramifiée de  $W(\mathbb{F})[1/p]$ ,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers et  $\pi$  une uniformisante. On note  $E(T)$  le polynôme d'Eisenstein de  $\pi$  et  $e = [E : W(\mathbb{F})(1/p)]$ . On considère  $\text{Sym}^r W(\mathbb{F})^2$  muni d'une action de  $KZ$  où  $p$  agit trivialement. L'induite compacte  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r W(\mathbb{F})^2$  est un  $W(\mathbb{F})[T]$ -module, où  $T$  agit via l'application  $KZ$ -bi-invariant ayant support sur  $KZ$  et telle que  $(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{smallmatrix}) \mapsto \text{Sym}^r(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$ . Alors par la Proposition 4.0.4 on a que l'isomorphisme suivant

$$(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r W(\mathbb{F})^2) / (E(T)) \xrightarrow{\sim} (\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r \mathcal{O}^2) / (T - \pi) \quad (4.0.6)$$

est sans  $p$ -torsion avec caractère central  $\chi_{\text{cyc}}^r$  et sa réduction modulo  $\pi$  est isomorphe à  $\pi(r, 0, 1)$ . En appliquant le foncteur  $\mathcal{V}$  à la complétion  $p$ -adique de  $(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r W(\mathbb{F})^2) / (E(T))$  on obtient un réseau dans une représentation cristalline  $V_\pi$  sur  $E$  de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  à poids de Hodge-Tate  $0, r + 1$  (on utilise ici un résultat profond cf. [3, Théorème 4.3.1]). On note  $D_{\text{cris}}^*(V_\pi)$  le module faiblement admissible qui est associé à  $V_\pi$ . On a que la trace du Frobenius de  $D_{\text{cris}}^*(V_\pi)$  est égal  $\pi$ .

On note  $R^{0, r+1}$  le quotient de  $R$  qui correspond aux déformations cristallines ayant poids de Hodge-Tate  $0, r + 1$ . Soit  $A$  une  $W(\mathbb{F})$  algèbre locale et  $\theta : R^{0, r+1} \rightarrow A$  une application de  $W(\mathbb{F})$ -algèbres. On note  $V_A$  la représentation de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  qui correspond à  $\theta$ . Il existe  $a_p \in R^{0, r+1}$  tel que pour tout  $A$  et  $\theta$  comme ci-dessus, la trace de  $\varphi$  sur  $D_{\text{cris}}(V_A^*)$  est égal à  $\theta(a_p)$ .

En réduisant (4.0.6) modulo  $p$  on obtient :

$$(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^r \mathbb{F}^2) / T^e \xrightarrow{\sim} \Pi(r, 0, 1) / T^e \Pi(r, 0, 1).$$

Donc  $R \rightarrow \mathbb{F}[[T]]/T^e$  se factorise à travers le quotient  $R^{0,r+1}$  et  $a_p \mapsto T$ . Comme le raisonnement est valable pour toute extension totalement ramifiée  $E$  de  $W(\mathbb{F})$ , le lemme suit lorsque  $r \in [0, p-2]$ . □

Quand  $r = p-1$  le théorème ci-dessus suit par le cas  $r = 0$  et le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.0.7.** *Il existe un morphisme de  $\mathbb{F}[T][G]$ -modules*

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \mathrm{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathbf{1}$$

qui induit un isomorphisme continu de  $\mathbb{F}[T][G]$ -modules :

$$\Pi(0, \lambda, \chi) \xrightarrow{\sim} \Pi(p-1, \lambda, \chi)$$

pour  $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{\pm 1\}$ .

*Démonstration.* On peut identifier  $I \setminus K$  à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$  via  $\gamma : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (\frac{a}{c})$ . En effet,  $K$  agit transitivement sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ , par  $\sigma \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \bar{\sigma} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , où  $\bar{\sigma}$  est la réduction modulo  $p$  de  $\sigma$ , et  $I$  est alors le stabilisateur de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Via cette identification on peut voir  $\mathrm{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2$  comme le sous espace de  $\mathrm{ind}_I^K \mathbf{1}$ , composé des fonctions de moyenne 0. En effet, si l'on a un polynôme  $P(x, y) := \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j x^{p-1-j} y^j$  dans  $\mathrm{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2$ , on peut lui associer une fonction  $f_{P(x,y)} : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$  définie par

$$f_{P(x,y)} \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right] := \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \alpha^{p-1-j} \beta^j$$

Comme on a identifié  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$  à  $I \setminus K$  via  $\gamma$ , on peut définir  $f_{P(x,y)}^+ : I \setminus K \rightarrow \mathbb{F}$  en posant  $f_{P(x,y)}^+ := f_{P(x,y)} \circ \gamma$ . On peut en déduire naturellement  $f_{P(x,y)}^{++} : K \rightarrow \mathbb{F} \in \mathrm{ind}_I^K \mathbf{1}$ . Un petit calcul montre que  $\sum_{(x,y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)} P(x, y) = 0$ , Ce qui implique que les fonctions sont effectivement de moyenne 0.

Un calcul facile montre que les éléments  $[\alpha, 1]$  et  $[1, 1]$  sont fixés par  $I$ . Par exemple, pour  $[\alpha, 1]$  on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} [\alpha, 1] = \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \alpha, 1 \right] = \left[ \alpha \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix}, 1 \right] = \left[ \alpha, \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} 1 \right] = [\alpha, 1].$$

Par conséquent, l'élément  $b = [\alpha, 1] - T[1, 1]$  est fixé par  $I$ . La réciprocity de Frobenius donne l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Hom}_I(\mathbf{1}, \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathbf{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(\mathrm{ind}_I^K \mathbf{1}, \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathbf{1})$$

qui associe à  $\phi \in \mathrm{Hom}_I(\mathbf{1}, \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathbf{1}) : 1 \mapsto -b$ , la fonction  $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(\mathrm{ind}_I^K \mathbf{1}, \mathrm{ind}_{KZ}^G \mathbf{1})$  qui envoyant la fonction caractéristique de  $I$  vers  $-b$ .

On veut prouver que  $\Phi$  s'annule sur les fonctions constantes. Tout d'abord, on fait la remarque suivante : on peut écrire chaque fonction constante de  $\text{ind}_I^K \mathbf{1}$  sous la forme  $\lambda(\sum_{k \in K/I} k[1, 1])$ , avec  $\lambda \in \mathbb{F}$ . On a donc

$$\Phi(\lambda(\sum_{k \in K/I} k[1, 1])) = \lambda \sum_{k \in K/I} -k \cdot b.$$

Pour voir que  $\Phi(\lambda(\sum_{k \in K/I} k[1, 1])) = 0$ , il suffit donc de montrer que  $\lambda \sum_{k \in K/I} k \cdot b = 0$ . Maintenant, en rappelant que  $b = [\alpha, 1] - T[1, 1]$ , on a

$$\sum_{k \in K/I} k \cdot T[1, 1] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k \in K/I} Tk \cdot [1, 1] \stackrel{(2)}{=} T(\sum_{k \in K/I} [k, 1]) \stackrel{(3)}{=} (p+1)T[1, 1] \stackrel{(4)}{=} T[1, 1],$$

où :

(1) suit du fait que  $T \in \text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \mathbf{1})$

(2) Pour chaque  $g \in G$ ,  $[k, 1](g) = \sigma(gk)(1)$  si  $g \in KZk^{-1}$  et 0 sinon. Et  $k \cdot [1, 1](g) = [1, 1](gk) = \sigma(gk)(1)$  si  $gk \in KZ$  i.e  $g \in KZk^{-1}$ , 0 sinon. D'où le résultat.

(3)  $T[k, 1] = T[1, 1]$  puisque

$$T[k, 1] = \sum_{g'KZ \in G/KZ} [kg', \varphi_\alpha(g'^{-1})(1)] = \sum_{g'KZ \in G/KZ} [g', \varphi_\alpha(g'^{-1})(1)] = T[1, 1]$$

(4)  $\mathbb{F}$  est de caractéristique  $p$ .

D'autre part, on a

$$\sum_{k \in K/I} k \cdot [\alpha, 1] = \sum_{k \in K/I} [k\alpha, 1] = T[1, 1]$$

dont la deuxième égalité provient du fait que

$$T[1, 1] = \sum_{kKZ \in G/KZ} [k, \varphi_\alpha(k^{-1})(1)] = \sum_{kKZ \in KZ\alpha^{-1}KZ/KZ} [k, 1] = \sum_{k \in K/I} [k\alpha, 1]$$

Puisque l'application  $k \in K/I \mapsto k\alpha^{-1} \in KZ\alpha^{-1}KZ/KZ$  est un isomorphisme, on a :

$$\sum_{k \in K/I} k \cdot b = \sum_{k \in K/I} k \cdot [\alpha, 1] - \sum_{k \in K/I} k \cdot T[1, 1] = T[1, 1] - T[1, 1] = 0.$$

On a donc que  $\Phi$  s'annule sur les fonctions constantes. Par conséquent, elle induit une application

$$\text{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \mathbf{1}$$

qui envoie  $x^{p-1}$  vers  $b$ . On note

$$h_b : \text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \mathbf{1} =: I(\mathbf{1})$$

l'application qui lui est associé par réciprocity de Frobenius. Remarquons que  $h_b$  est caractérisée par la propriété  $h_b([1, x^{p-1}]) = b$ .

Maintenant il faut vérifier que  $h_b$  est compatible avec l'action de  $T$ . Soit  $C \subset K$  l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$  pour  $i = 0, 1, \dots, p-1$ , auquel on ajoute la matrice  $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors  $C\alpha$  est un ensemble de représentants de  $KZ\alpha KZ/KZ$ , et on a :

$$\begin{aligned} T([1, x^{p-1}]) &= \sum_{gKZ \in G/KZ} [g, \varphi_\alpha(g^{-1})(x^{p-1})] \stackrel{(1)}{=} \sum_{k \in C} (k\alpha) \cdot [1, \varphi_\alpha(\alpha^{-1}k^{-1})(x^{p-1})] \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k \in C} (k\alpha) \cdot [1, \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k^{-1}\right)(x^{p-1})] \stackrel{(3)}{=} \sum_{k \in C \setminus \{1\}} (k\alpha) \cdot [1, y^{p-1}] \\ &= \sum_{k \in C \setminus \{1\}} (k\alpha w) \cdot [1, x^{p-1}]. \end{aligned}$$

Donc on a

$$h_b(T[1, x^{p-1}]) = \sum_{k \in C \setminus \{1\}} (k\alpha w) \cdot b. \quad (*)$$

(1)  $\varphi_\alpha$  est à support sur  $KZ\alpha^{-1}KZ$  et déterminée par  $\alpha^{-1} \mapsto \text{Sym}^r \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Or, comme on l'a déjà observé, il y a un isomorphisme entre  $K/I$  et  $KZ\alpha KZ/KZ$ , ce qui permet d'écrire la somme sur  $C$ .

(2)  $\varphi_\alpha(\alpha^{-1}k^{-1}) = \varphi_\alpha(\alpha^{-1})k^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k^{-1}$

(3) Si  $k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$  alors  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot x^{p-1} = (\overline{-i} y)^{p-1} = y^{p-1}$

Si  $k = w$  alors  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^{p-1} = y^{p-1}$ .

Comme,

$$k\alpha w[\alpha, 1] = [k\alpha w\alpha, 1] = [kpw, 1] = [1, 1]$$

La formule (\*) se traduit à :

$$\begin{aligned} h_b(T[1, x^{p-1}]) &= \sum_{k \in C \setminus \{1\}} ([1, 1] - T[k\alpha w, 1]) = \sum_{C \setminus \{1\}} -T[k\alpha, 1] \\ &\stackrel{(4)}{=} T([\alpha, 1] - T[1, 1]) = Th_b([1, x^{p-1}]) \end{aligned}$$

dont (4) suit du fait que

$$T[1, 1] = \sum_{g'KZ \in G/KZ} [g', \varphi(g'^{-1})(1)] = \sum_{g \in KZ\alpha KZ/KZ} [k\alpha, 1]$$

et que :

$$\sum_{k \in C \setminus \{1\}} [k\alpha, 1] = T[1, 1] - [\alpha, 1].$$

Comme chaque morphisme de  $G$ -modules défini sur  $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2$  est caractérisée par sa valeur sur  $[1, x^{p-1}]$ , et  $T$  est  $G$  equivariant,  $h_b$  est bien un morphisme de  $\mathbb{F}[T][G]$ -modules.

Pour prouver que  $h_b$  induit un isomorphisme, on a besoin du résultat suivant :

**Lemme 4.0.8.** *Soit  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Alors  $h_b$  est non nulle modulo  $T - \lambda$ .*

*Démonstration.* Supposons  $(T - \lambda)c = b$  pour  $c \in \text{ind}_{KZ}^G \mathbf{1}$ . Comme le support de  $b$  est contenu dans la boule de rayon 1, d'après le Lemme 2.4.4, on a que le support de  $c$  est contenu dans la boule de rayon 0. Donc  $c$  doit être dans  $\mathbb{F} \cdot [1, 1]$ . Mais alors  $[\alpha, 1]$  devrait être dans l'espace vectoriel engendré par  $[1, 1]$  et  $T[1, 1]$ , qui est absurde pour des raisons de support. □

Grâce au Lemme (4.0.8),  $h_b$  induit un homomorphisme non nul

$$\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2 / (T_{p-1} - \lambda) \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \mathbf{1} / (T_0 - \lambda)$$

Pour  $\lambda \neq \pm 1$ , les deux représentations sont irréductibles, donc le morphisme obtenu est un isomorphisme. Si  $n \geq 1$ ,  $h_b$  induit encore un homomorphisme

$$\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2 / (T_{p-1} - \lambda)^n \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \mathbf{1} / (T_0 - \lambda)^n,$$

et, par récurrence sur  $n$ , si  $\lambda \neq \pm 1$ , ce morphisme est encore un isomorphisme en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Pi_{p-1} / (T_{p-1} - \lambda)^n \xrightarrow{T_{p-1} - \lambda} \Pi_{p-1} / (T_{p-1} - \lambda)^{n+1} \longrightarrow \Pi_{p-1} / (T_{p-1} - \lambda) \longrightarrow 0$$

où l'on a posé  $\Pi_{p-1} := \text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p-1} \mathbb{F}^2$ . L'exactitude à gauche vient du fait que si  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $\Pi_{p-1}$  n'a pas de torsion sous  $T_{p-1} - \lambda$  (résultat analogue au Lemme 4.0.8 en remplaçant  $b$  par 0). En passant à la limite sur  $n$ , on obtient l'isomorphisme voulu. □



# Chapitre 5

## Un énoncé local

Nous adopterons les notations suivantes :

On fixe  $\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  un type galoisien,  $k \geq 2$  un entier et  $\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow E^\times$  un caractère continu. On note  $V$  une représentation potentiellement semi-stable de type  $(k, \tau, \psi)$ . On note  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$  une représentation continue, d'espace vectoriel sous-jacent  $V_{\mathbb{F}}$ , tel que  $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{\rho}) = \mathbb{F}$ . On note  $R(\bar{\rho})$  la  $\mathcal{O}$ -algèbre universelle de déformation.

### 5.1 Représentations et Pseudo-représentations

On a vu dans le Lemme 3.2.6 que si  $\bar{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  est une représentation absolument irréductible alors ses déformations sont déterminées par leur traces. L'idée au-dessous de la notion de pseudo-représentation est donner une caractérisation des applications sur  $G$  qui sont trace d'une représentation et étudier la théorie de déformation via les déformations des applications traces. C'est Wiles qui a le premier introduit les pseudo-représentations de dimension 2 d'un certain groupe [37]. Puis Taylor a développé l'étude des pseudo-représentations de dimension  $d$  d'un groupe quelconque [34]. Dans cette section on ne donnera que des définitions et des énoncés des résultats qu'on va utiliser par la suite.

Soit  $R$  un anneau avec unité et  $B$  une  $R$ -algèbre.

**Définition 5.1.1.** *Une représentation de dimension  $d$  de  $B$  dans  $R$  est un morphisme de  $R$ -algèbres  $\rho : B \rightarrow \mathrm{M}_d(R)$ . Deux représentations  $\rho$  et  $\rho'$  sont dites équivalentes s'il existe une matrice  $M$  dans  $\mathrm{GL}_d(R)$  tel que  $\rho'(b) = M^{-1}\rho(b)M$  pour tout  $b$  dans  $B$ . Si  $R$  est local de corps résiduel  $F$ , la représentation résiduelle associée est la représentation  $\bar{\rho} : B \otimes_R F \rightarrow \mathrm{M}_d(F)$  déduite de  $\rho$  par réduction modulo l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $R$ .*

**Remarque 5.1.2.** *Lorsque  $B$  est l'algèbre  $R[G]$  d'un groupe  $G$ , il y a une correspondance*

bijjective naturelle entre les représentations de  $B$  dans  $M_d(R)$  et les représentations  $G$  dans  $GL_d(R)$ .

**Définition 5.1.3.** Une pseudo-représentation de dimension  $d$  de  $B$  dans  $R$  est une forme linéaire  $T : B \rightarrow R$  vérifiant :

- i.  $T(1) = d$ ;
- ii.  $T$  est centrale, c'est-à-dire que  $\forall b_1, b_2 \in B, T(b_1 b_2) = T(b_2 b_1)$ ;
- iii.  $\forall b_0, \dots, b_d \in B, \sum_{\sigma \in S_{d+1}} \epsilon(\sigma) T_\sigma(b_0, \dots, b_d) = 0$ , où  $\sigma$  est une permutation de  $S_{d+1}$ ,  $\epsilon(\sigma)$  est sa signature. Si  $\sigma$  se décompose en  $m_\sigma$  cycles de support disjoints :

$$(i_1^1, i_1^2, \dots, i_1^{k_1})(i_2^1, i_2^2, \dots, i_2^{k_2}) \dots (i_{m_\sigma}^1, i_{m_\sigma}^2, \dots, i_{m_\sigma}^{k_1})$$

où  $i_1^1 = 0$  et  $T_\sigma$  est l'application définie par

$$T_\sigma(b_0, \dots, b_d) = T(b_{i_1^1}, b_{i_1^2}, \dots, b_{i_1^{k_1}}) T(b_{i_2^1}, b_{i_2^2}, \dots, b_{i_2^{k_2}}) \dots T(b_{i_{m_\sigma}^1}, b_{i_{m_\sigma}^2}, \dots, b_{i_{m_\sigma}^{k_1}}).$$

Lorsque  $G$  est un groupe, on peut définir une pseudo-déformation de dimension  $d$  de  $G$  dans  $R$  : c'est une application  $T : G \rightarrow R$  vérifiant les propriétés (i),(ii),(iii) énoncées ci-dessus pour les éléments du groupe. Si  $B = R[G]$  ces deux notions sont équivalentes, comme dans le cas des représentations.

**Définition 5.1.4.** Soit  $f : A \rightarrow A'$  une surjection d'anneaux et  $T_{A'} : G \rightarrow A'$  une pseudo-représentation. Une déformation de  $T_{A'}$  dans  $A$  est une pseudo-représentations continue  $T_A : G \rightarrow A$  de  $G$  telle que  $f \circ T_A = T_{A'}$ .

Maintenant on suppose que  $G$  soit profini et engendré topologiquement par un nombre fini d'éléments. Soit  $\kappa$  un corps topologique tel que 2 soit inversible. Si  $\kappa$  est discrète et de caractéristique  $p > 0$ , on pose  $W = \kappa$  ou bien un anneau de valuation discrète de caractéristique 0 et de corps résiduel  $\kappa$ . Dans tous les autres cas on pose  $W = \kappa$ .

On fixe une psudo-représentation continue de dimension  $d : T_\kappa : G \rightarrow \kappa$ . On note  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $W$ -algèbres locales artiniennes de corps résiduel  $\kappa$ . On note  $D_{T_\kappa}^{\text{ps}} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  définie par

$$D_{T_\kappa}^{\text{ps}}(A) = \{\text{déformations } \tau_A : G \rightarrow A \text{ qui relèvent } T_\kappa\}$$

**Lemme 5.1.5.** Supposons que  $d!$  soit inversible dans  $\kappa$ . Alors  $D_{T_\kappa}^{\text{ps}}$  est pro-représentable par une  $W$ -algèbre locale complète  $R_{T_\kappa}^{\text{ps}}$ .

*Démonstration.* Voir [26, Lemme (1.4.2)]. □

Soit  $V_\kappa$  un  $\kappa$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de  $G$  tel que  $\text{End}_{\kappa[G]} V_\kappa = \kappa$ . Soit  $R_{V_\kappa}$  la  $W$ -algèbre universelle de déformation de  $V_\kappa$  qui représente le foncteur  $D_{V_\kappa}$ . On note  $T_\kappa$  la pseudo-représentation qui correspond à  $V_\kappa$  et  $R_{T_\kappa}^{\text{ps}}$  la

$W$ -algèbre locale complète qui représente le foncteur  $D_{T_\kappa}^{\text{ps}}$ .<sup>1</sup> Soit  $\eta : D_{V_\kappa} \rightarrow D_{T_\kappa}^{\text{ps}}$  définie par :

$$\eta(A) : D_{V_\kappa}(A) \rightarrow D_{T_\kappa}^{\text{ps}}(A), \quad \rho \mapsto \text{Trace}(\rho).$$

Comme  $\text{Hom}(R_{V_\kappa}, A) \xrightarrow{\sim} D_{V_\kappa}(A)$  et  $\text{Hom}(R_{T_\kappa}^{\text{ps}}, A) \xrightarrow{\sim} D_{T_\kappa}^{\text{ps}}(A)$  on en déduit une flèche :

$$f(A) : \text{Hom}_{W\text{-alg}}(R_{V_\kappa}, A) \rightarrow \text{Hom}_{W\text{-alg}}(R_{T_\kappa}^{\text{ps}}, A).$$

On note  $\theta : R_{T_\kappa}^{\text{ps}} \rightarrow R_{V_\kappa} = f(R_{V_\kappa})(\text{id}_{R_{V_\kappa}})$ . On a le résultat suivant

**Théorème 5.1.6.** *Soit  $V_\kappa$  un  $\kappa$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action continue de  $G$  tel que  $\text{End}_{\kappa[G]} V_\kappa = \kappa$ . Soit  $R_{V_\kappa}$  la  $W$ -algèbre universelle de déformation de  $V_\kappa$ . On note  $T_\kappa$  la pseudo-représentation qui correspond à  $V_\kappa$  et  $\theta : R_{T_\kappa}^{\text{ps}} \rightarrow R_{V_\kappa}$  l'application qu'on a défini au-dessus.*

- i. Si  $V_\kappa$  est absolument irréductible, alors  $\theta$  est un isomorphisme.
- ii. Si  $V_\kappa$  est une extension non triviale de  $\omega_1$  par  $\omega_2$  pour deux caractères distincts  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de  $G$  et  $\text{Ext}_{\kappa[G]}^1(\omega_1, \omega_2)$  est de dimension 1 sur  $\kappa$ , alors  $\theta$  est surjective.

**Lemme 5.1.7.** *On suppose que  $G = G_{\mathbb{Q}_p}$  et  $\kappa \subset \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $V_\kappa$  comme dans 5.1.6. Supposons que  $V_\kappa$  satisfait (i) ou (ii) du Théorème 5.1.6. Alors l'application*

$$(R_{T_\kappa}^{\text{ps}}[1/p])^{\text{red}} \rightarrow (R_{V_\kappa}[1/p])^{\text{red}}$$

induit par  $\theta$  est un isomorphisme.

**Lemme 5.1.8.** *Soit  $T_{\mathbb{F}}$  une pseudo-représentation de dimension 2 de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $\mathbb{F}$  avec  $T_{\mathbb{F}}$  irréductible ou bien  $T_{\mathbb{F}}$  une somme de deux pseudo-représentations de dimension 1 distinctes,  $\omega_1, \omega_2 : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ . Si  $p = 3$ , on suppose que  $\omega_1 \omega_2^{-1} \neq \omega$ . Soit  $R_{T_{\mathbb{F}}}^{\text{ps}, \circ}$  l'image de  $R_{T_{\mathbb{F}}}^{\text{ps}}$  dans  $(R_{T_{\mathbb{F}}}^{\text{ps}}[1/p])^{\text{red}}$ . Alors il existe un  $R_{T_{\mathbb{F}}}^{\text{ps}, \circ}$ -module  $M$  libre de rang 2 muni d'une action continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  tel que pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$  la trace de  $\sigma$  sur  $M$  est donnée par  $T(\sigma) \in R_{T_{\mathbb{F}}}^{\text{ps}, \circ}$ .*

On remarque les deux faits suivants que l'on déduit par le Théorème 5.1.6, et les Lemmes 5.1.7 et 5.1.8 :

- i. Soit  $V_\kappa$  un  $\kappa$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une action continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  telle que  $\text{End}_{\kappa[G]} V_\kappa = \kappa$ . Soit  $\bar{\tau}$  la pseudo-représentation définie par  $\bar{\tau} = \text{Trace}(\bar{\rho})$  et  $\tau$  une pseudo-représentation. Alors il existe une représentation  $V_\tau$  de dimension 2 sur  $E'$  de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  telle que  $\tau = \text{Trace}(V_\tau)$ .
- ii.  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$  est topologiquement engendré par les éléments  $T(\sigma)$ ,  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ .

On conclut cette section avec le résultat suivant :

---

1. La pseudo-représentation  $T_\kappa$  est définie par  $T_\kappa(g) = \text{Trace}(\rho(g))$ .

**Théorème 5.1.9.** *Soit  $V_{\mathbb{F}}$  une représentation continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel de dimension 2 à caractère central  $\psi_{\chi_{\text{cyc}}}$ . Soient  $\bar{\mathfrak{r}} = \text{Trace}(V_{\mathbb{F}})$  et  $R^{\text{ps}}(\bar{\mathfrak{r}})$  la  $\mathcal{O}$ -algèbre universelle de déformation. On suppose que  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$  est un facteur de Jordan-Hölder de  $V_{\mathbb{F}}$ . Alors il existe une application  $\theta : R^{\text{ps}}(\bar{\mathfrak{r}}) \rightarrow \mathbb{F}[[S]]$  telle que pour tout  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ ,  $\theta(T(\sigma)) \in \mathbb{F}[[S]]$  agit sur  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$  via  $\sigma + \psi_{\chi_{\text{cyc}}}(\sigma)\sigma^{-1}$ . L'application  $\theta$  est surjective sauf si  $r = p-2$  et  $\lambda = \pm 1$ . Si  $V_{\mathbb{F}}$  est réductible, alors  $\theta$  dépend seulement de  $V_{\mathbb{F}}^{\text{ss}}$  et pas de  $(r, \lambda, \chi)$ .*

## 5.2 Une grosse représentation de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Dans cette section on va construire, à partir de l'induite compacte  $\text{ind}_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma(k, \tau)$ , une représentation de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sur laquelle  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  agit. Cette représentation fera le lien entre  $\mu_{\text{aut}}$  et  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}$ .

L'hypothèse suivante sur le type  $(k, \tau, \psi)$  est cruciale pour la suite du travail.

**Hypothèse 5.2.1.** *Soit  $E'$  une extension finie de  $E$ . Soit  $V$  un  $E'$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une action continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . Supposons que  $V$  soit potentiellement semi-stable de type  $(k, \tau, \psi)$ . Il existe un  $\mathcal{O}_{E'}$ -réseau admissible  $\Pi$  à caractère central  $\psi$ , tel que  $\mathcal{V}(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E' \xrightarrow{\sim} V$  et tel que  $\sigma(k, \tau) \hookrightarrow \Pi \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  soit une inclusion  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -équivariante.*

**Remarque 5.2.2.** *Kisin a construit un candidat pour  $\Pi$  qui satisfait  $\mathcal{V}(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E' \xrightarrow{\sim} V$  sauf si  $p = 3$  et la représentation modulo  $p$  associée à  $V$  est  $\begin{pmatrix} \omega & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \chi$  ou  $\text{ind}_{G_{\mathbb{Q}_p^2}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} \omega_2^2 \otimes \chi$  (cf. [27, Théorème 0.1]). L'inclusion n'est connue que si  $V$  devient semi-stable sur une extension abélienne de  $\mathbb{Q}_p$  (cf. [26, Théorème 1.2.8]).*

On rappelle que  $\sigma(\tau)$  est le type défini par Henniart associé à  $\tau$  et

$$L_{k, \tau} \subset \sigma(k, \tau) = \sigma(\tau) \otimes_E \text{Sym}^{k-2} E^2$$

est un  $\mathcal{O}$ -réseau stable. Le caractère central de  $\sigma(k, \tau)$  est par définition

$$\sigma(k, \tau)|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \chi_{\text{cyc}}^{k-2} \det \tau|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \sigma(k, \tau)|_{\mathbb{Z}_p^\times}.$$

On note  $\bar{\mathfrak{r}} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}$  la pseudo-représentation donnée par la trace de  $\bar{\rho}$  et  $R^{\text{ps}}(\bar{\mathfrak{r}})$  la  $\mathcal{O}$ -algèbre universelle de déformation. On suppose que  $E'$  est une extension de  $E$  et que  $\mathfrak{r}$  est une déformation de  $\bar{\mathfrak{r}}$  à  $\mathcal{O}_{E'}$ . Quitte à agrandir  $E'$ , il existe une représentation  $V_{\mathfrak{r}}$  de dimension 2 sur  $E'$  de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  tel que  $\mathfrak{r}$  est donnée par la trace de  $V_{\mathfrak{r}}$ . La semi-simplifiée est déterminée de façon unique. On suppose que  $V_{\mathfrak{r}}$  est de type  $(k, \tau, \psi)$ . Par l'Hypothèse 5.2.1, il existe un  $\mathcal{O}_{E'}$ -réseau admissible  $\Pi_{\mathfrak{r}}$  de caractère central  $\psi$  tel que

$V_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(\Pi_{\mathfrak{r}}) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  et il existe une inclusion  $K$ -équivariante  $\sigma(k, \tau) \hookrightarrow \Pi_{\mathfrak{r}} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$ . Si  $z \in Z$  et  $x \in \sigma(k, \tau)$ , on pose  $z \cdot x := \psi(z)x$ . Le plongement devient alors  $KZ$ -équivariant. Par le Lemme de réciprocity compacte de Frobenius on obtient une application

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G \sigma(k, \tau) \rightarrow \Pi_{\mathfrak{r}} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'.$$

Quitte à multiplier par une puissance de  $p$ , on peut supposer qu'elle induit une application

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G L_{(k, \tau)} \rightarrow \Pi_{\mathfrak{r}}. \quad (5.2.3)$$

**Théorème 5.2.4.** *On note  $\Pi(\mathfrak{r})$  la fermeture de l'image de 5.2.3. Elle est un  $\mathcal{O}$ -réseau admissible tel que :*

- i.  $\Pi(\mathfrak{r}) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E' = \Pi_{\mathfrak{r}} \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  si  $V_{\mathfrak{r}}$  est absolument irréductible.
- ii.  $\Pi(\mathfrak{r}) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  est un sous module fermé strict sinon. Plus précisément, dans ce cas  $\Pi(\mathfrak{r}) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  et  $(\Pi_{\mathfrak{r}}/\Pi(\mathfrak{r})) \otimes_{\mathcal{O}_{E'}} E'$  sont des  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentations admissibles qui dépendent seulement de  $V_{\mathfrak{r}}^{\mathrm{ss}}$ .

*Démonstration.* Voir [14, Théorème 0.4] ou [9, Proposition 2.2.1]. □

On peut appliquer le foncteur  $\mathcal{V}$  de Colmez à  $\Pi(\mathfrak{r})$  et on obtient une représentation de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur un  $\mathcal{O}$ -module libre de rang 1. Comme  $\mathcal{V}(\Pi(\mathfrak{r}))$  ne dépend que de  $V_{\mathfrak{r}}^{\mathrm{ss}}$ , l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $\mathcal{V}(\Pi(\mathfrak{r}))$  est donnée par  $g \cdot x = \chi_{\mathrm{cyc}}^{k-1}(g)\mu_{\lambda}(g)x$ .

On pose  $V(\mathfrak{r}) = \mathcal{V}(\Pi(\mathfrak{r}))$ . On déduit du Théorème 5.2.4 que l'image de la composée

$$V(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathcal{V}(\Pi_{\mathfrak{r}}) \rightarrow V_{\mathfrak{r}}$$

est égal à  $V_{\mathfrak{r}}$  si  $V_{\mathfrak{r}}$  est absolument irréductible et à un  $E'$ -sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $V_{\mathfrak{r}}$  sinon.

Maintenant on se donne une collection finie de déformations distinctes  $U = \{\mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_n\}$  de  $\bar{\mathfrak{r}}$  (définies sur  $E'$  quitte à agrandir  $E'$ ). Pour toute  $\mathfrak{r}_i$  on fixe  $V_{\mathfrak{r}_i}$ , potentiellement semi-stable de type  $(k, \tau, \psi)$  tel que la trace est  $\mathfrak{r}_i$ . Pour tout  $i$  on obtient une flèche

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G L_{k, \tau} \rightarrow \Pi_{\mathfrak{r}_i}.$$

On note  $\Pi(U)$  la fermeture de l'image de

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G L_{k, \tau} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \Pi_{\mathfrak{r}_i}.$$

Elle est encore un  $\mathcal{O}$ -réseau admissible.

Enfin, si on se donne une famille dénombrable de déformations  $U = \{\mathfrak{r}_i\}_{i \geq 1}$  et une famille  $(V_{\mathfrak{r}_i})_{i \geq 1}$  de représentations semi-stables de type  $(k, \tau, \psi)$  tel que, pour tout  $i$ , la trace de  $V_{\mathfrak{r}_i}$  est  $\mathfrak{r}_i$ , on pose

$$\Pi(U) = \varprojlim \Pi(U')$$

où  $U'$  parcourt les sous-ensembles finis de  $U$ . On pose  $V(U) = \varprojlim \mathcal{V}(\Pi(U'))$ .

**Lemme 5.2.5.** *Soit  $U = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$  une famille dénombrable de déformations distinctes de  $\bar{\tau}$ . Alors :*

- i.  $V(U)$  est un  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$ -module.
- ii. Si  $U' \subset U$  est une inclusion d'ensembles, alors la flèche naturelle  $V(U) \rightarrow V(U')$  est une application de  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$ -modules.
- iii. Si  $\tau \in U$ , alors  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$  agit sur  $V(\tau)$  via l'image de l'application correspondante

$$x_\tau : R^{\text{ps}}(\bar{\tau}) \rightarrow \mathcal{O}_{E'}.$$

En particulier  $V(\tau)$  est un  $x_\tau(R^{\text{ps}}(\bar{\tau}))$ -module.

*Démonstration.* i. Il suffit de démontrer le lemme lorsque  $U = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ . Comme on a une inclusion  $\Pi(U) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \Pi_{\tau_i}$  et le foncteur  $\mathcal{V}$  est exact, on obtient  $V(U) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\Pi_{\tau_i})$ . Or, pour tout  $i$ ,  $\mathcal{V}(\Pi_{\tau_i}) \subset V_{\tau_i}$  et donc on a une inclusion  $V(U) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^n V_{\tau_i}$ . L'anneau  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$  agit sur  $V_{\tau_i}$  via le caractère  $x_{\tau_i} : R^{\text{ps}}(\bar{\tau}) \rightarrow \mathcal{O}_{E'}$  correspondant à la pseudo-déformation  $\tau_i$ . On a vu que  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$  est topologiquement engendré par les éléments  $T(\sigma)$ ,  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ . Il suffit de vérifier que l'application

$$T(\sigma) : V(U) \rightarrow \bigoplus_{r=1}^n V_{\tau_r}$$

induite par  $T(\sigma)$  a son image dans  $V(U)$ . L'action de  $T(\sigma)$  sur chaque  $V_{\tau_i}$  est donnée par  $\sigma + \psi \chi_{\text{cyc}}(\sigma) \sigma^{-1}$ . Comme  $V(U)$  est un sous-espace de  $\bigoplus_{i=0}^n V_{\tau_i}$  stable par  $G_{\mathbb{Q}_p}$  on peut conclure.

- ii. Il est conséquence du fait que l'application  $V(U) \rightarrow V(U')$  respecte l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ .
- iii. C'est évident. □

**Remarque 5.2.6.** *On peut montrer de la même manière que  $V(U)$  est un  $R(\bar{\rho})$ -module car  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau}) \twoheadrightarrow R(\bar{\rho})$  par le Théorème 5.1.6. De plus, si  $U' \subseteq U''$  est une inclusion d'ensembles finis, la flèche  $\Pi_{U', U''} : \Pi(U'') \rightarrow \Pi(U')$  est d'image dense car le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \text{ind}_{KZ}^G L_{k, \tau} & \xrightarrow{f_{U''}} & \Pi(U'') \\ & \searrow f_{U'} & \downarrow \Pi_{U', U''} \\ & & \Pi(U') \end{array}$$

est commutative et donc l'image de  $\Pi_{U', U''}$  contient  $f_{U'}(\text{ind}_{KZ}^G(L_{k, \tau}))$ . Comme  $\Pi(U')$  et  $\Pi(U'')$  sont des  $\mathcal{O}$ -reseaux admissibles, et donc de longueur finie modulo  $\pi^n$ , pour tout  $n$ , alors  $\Pi_{U', U''}$  est surjective. Par exactitude du foncteur  $\mathcal{V}$  on a aussi  $V(U'') \twoheadrightarrow V(U')$ .

### 5.3 Preuve de l' Inégalité

Dans cette section on veut prouver le résultat suivant qui établit une inégalité entre les deux multiplicités  $\mu_{\text{gal}}(k, \tau, \bar{\rho})$  et  $\mu_{\text{aut}}(k, \tau, \bar{\rho})$  :

**Théorème 5.3.1.** *Soit  $k$  un entier  $\geq 2$ . Soit  $\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(E)$  un type galoisien et  $\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow O^\times$  un caractère continu telle que  $\psi \chi_{\text{cyc}}^{2-k} |_{I_{\mathbb{Q}_p}} \sim \det \tau$ .*

*Supposons que*

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F})$$

*est soit absolument irréductible soit une extension non triviale de  $\omega_2$  par  $\omega_1$ , où  $\omega_1, \omega_2 : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}^\times$  sont des caractères distincts avec  $\omega_1 \neq \omega\omega_2$ .*

*Alors :*

$$e(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq \mu_{\text{aut}}(k, \tau, \bar{\rho}).$$

Le théorème, tel que démontré par Kisin, découle de 2 majorations intermédiaires.

#### 5.3.1 Première majoration

Soit  $I_x$  le noyau de la flèche  $x : R(\bar{\rho}) \rightarrow \mathcal{O}_{E'}$  qui correspond à une représentation potentiellement semi-stable de type  $(k, \tau, \psi) : V_x$ . On note  $U$  l'ensemble des applications qui vérifient cette condition et  $I = \bigcap_{x \in U} I_x$ . L'ensemble  $U$  est non dénombrable. D'après le Lemme de Rees (cf. [30, Théorème 8.5]) il existe  $U_0$ , sous-ensemble dénombrable de  $U$ , tel que  $I = \bigcap_{x \in U_0} I_x$ . Donc  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) = R(\bar{\rho})/\bigcap_{x \in U_0} I_x$ . On dispose de  $\Pi(U_0)$  et de  $V(U_0)$  (cf. 5.2).

**Définition 5.3.2.** *Soit  $Q$  une représentation de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  sur un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel. Soit  $P$  une collection de représentations de la forme  $\pi(r, \lambda, \chi)$  toutes à caractère central  $\psi$ . On pose  $Q_{\hat{P}} = \varprojlim Q'$  où  $Q'$  parcourt les quotients de  $Q$  de longueur finie tels que les facteurs de Jordan-Hölder sont isomorphes à un sous-quotient d'une représentation de la forme  $\pi(r, \lambda, \chi) \in P$ .*

**Remarque 5.3.3.** *Le foncteur  $Q \mapsto Q_{\hat{P}}$  est exact à droite.*

On pose  $\mathcal{V}(Q_{\hat{P}}) = \varprojlim \mathcal{V}(Q')$ .

**Lemme 5.3.4.** *i.  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  agit fidèlement sur  $V(U_0)$ .*

*ii.  $V(U_0)$  est un  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ -module de type fini sans  $p$ -torsion.*

*Démonstration.* i. On rappelle que  $R(\bar{\rho})$  agit sur  $V_x$  à travers la flèche  $x : R(\bar{\rho}) \rightarrow \mathcal{O}_{E'}$ . Comme l'action de  $R(\bar{\rho})/I_x$  est fidèle sur  $V_x$  et  $V(U') \hookrightarrow \bigoplus_{x \in U'} V_x$ , alors l'action de  $R(\bar{\rho})/\bigcap_{x \in U'} I_x$  est fidèle sur  $V(U')$ , où  $U'$  est un ensemble fini. Donc l'action de  $R^\psi(k, \tau, \psi)$  est fidèle sur  $V(U_0)$  comme  $V(U_0) = \varprojlim_{U' \subset U_0} V(U')$  et  $\bigcap_{x \in U} I_x = \bigcap_{x \in U_0} I_x$ .

- ii. Si  $U'$  est un sous-ensemble fini de  $U$ , alors  $\Pi(U')$  est un  $\mathcal{O}$ -réseau admissible. Alors  $V(U') = \mathcal{V}(\Pi(U'))$  est sans  $p$ -torsion et  $p$ -adiquement séparé et complet, à savoir  $\bigcap_n p^n V(U') = 0$ . Donc il en est de même pour  $V(U_0)$ . Il suffit donc de montrer que  $V(U_0)/\pi V(U_0)$  est un  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes \mathbb{F}$ -module de type fini. On pose  $\bar{L}_{k,\tau} := L_{k,\tau} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{F}$ . Notons  $P_{\bar{\rho}}$  l'ensemble de représentations de la forme  $\pi(r, \lambda, \chi)$ , à caractère central  $\psi$ , telles que  $\mathcal{V}(\pi(r, \lambda, \chi))$  est un facteur de Jordan-Hölder de  $V_{\mathbb{F}}$ . Par densité de  $\text{ind}_{KZ}^G L_{k,\tau}$  dans  $\Pi(U')$ , on a  $\text{ind}_{KZ}^G \bar{L}_{k,\tau} \rightarrow \Pi(U')/\pi\Pi(U')$ . On veut montrer que  $\Pi(U')/\pi\Pi(U')$  n'a que des facteurs de Jordan-Hölder dans  $P_{\bar{\rho}}$ . Comme  $V_x$  est une déformation de  $\bar{\rho}$  alors  $V_x/\pi^n V_x$  est aussi une déformation de  $\bar{\rho}$ . Alors ses facteurs de Jordan-Hölder sont ceux de  $\bar{\rho}$  donc il en est de même de  $\bigoplus_{x \in U'} V_x/\pi^n V_x$  donc aussi de  $V(U')/\pi V(U')$ . Cela entraîne que pour tout  $U'$  sous-ensemble fini de  $U$ ,  $\Pi(U')/\pi\Pi(U')$  est un quotient de  $\text{ind}_{KZ}^G \bar{L}_{k,\tau}$  dont les facteurs de Jordan-Hölder sont dans  $P_{\bar{\rho}}$  et on en déduit

$$(\text{ind}_{KZ}^G \bar{L}_{k,\tau})_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}} \rightarrow \Pi(U_0)/\pi\Pi(U_0).$$

Fixons maintenant  $L_{i-1} \subset L_i$  une filtration de  $\bar{L}_{k,\tau}$  par des sous- $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels stables par  $KZ$  tels que  $L_i/L_{i-1}$  est une représentation irréductible de  $KZ$  sur  $\mathbb{F}$ .

Considerons les flèches

$$(\text{ind}_{KZ}^G L_i)_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}} \rightarrow (\text{ind}_{KZ}^G \bar{L}_{k,\tau})_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}} \rightarrow \Pi(U_0)/\pi\Pi(U_0)$$

d'où on déduit

$$\mathcal{V}((\text{ind}_{KZ}^G L_i)_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}}) \rightarrow \mathcal{V}((\text{ind}_{KZ}^G \bar{L}_{k,\tau})_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}}) \twoheadrightarrow \mathcal{V}(\Pi(U_0)/\pi\Pi(U_0)) \quad (5.3.5)$$

la deuxième flèche étant surjective par exactitude du foncteur  $\mathcal{V}$ . On note  $(V(U_0)/\pi V(U_0))_i$  l'image de la flèche composée à droite. On veut montrer que  $(V(U_0)/\pi V(U_0))_i$  est un sous- $R(\bar{\rho})$ -module de  $V(U_0)/\pi V(U_0)$ . En effet, comme  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$  est topologiquement engendré par  $T(\sigma)$  pour  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$  et  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau}) \twoheadrightarrow R(\bar{\rho})$ , on déduit que  $R(\bar{\rho})$  est engendré par le même éléments. Donc il suffit de montrer que les éléments  $T(\sigma) \in R(\bar{\rho})$  préservent  $(V(U_0)/\pi V(U_0))_i$ . Or,  $T(\sigma)$  agit par :

$$T(\sigma) = \sigma + \bar{\psi} \bar{\chi}_{\text{cyc}} \sigma^{-1} \quad \text{sur } V(U_0)/\pi V(U_0)$$

et  $(V(U_0)/\pi V(U_0))_i$  est stable par  $G_{\mathbb{Q}_p}$ , on peut donc conclure.

Soit maintenant  $\text{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0)) := (V(U_0)/\pi V(U_0))_i / (V(U_0)/\pi V(U_0))_{i-1}$ . On a par 5.3.5 :

$$\text{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0)) \text{ est un quotient de } \mathcal{V}((\text{ind}_{KZ}^G L_i)_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}}) / \mathcal{V}((\text{ind}_{KZ}^G L_{i-1})_{\widehat{P_{\bar{\rho}}}}).$$

Or, de la suite exacte suivante :

$$\mathrm{ind}_{KZ}^G L_{i-1} \rightarrow \mathrm{ind}_{KZ}^G L_i \rightarrow \mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}) \rightarrow 0$$

on déduit, par exactitude à droite du foncteur  $Q \mapsto Q_{\widehat{P}_\rho}$  :

$$(\mathrm{ind}_{KZ}^G L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho} \rightarrow (\mathrm{ind}_{KZ}^G L_i)_{\widehat{P}_\rho} \rightarrow (\mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}))_{\widehat{P}_\rho} \rightarrow 0$$

et donc, par exactitude du foncteur  $\mathcal{V}$  :

$$\mathcal{V}(\mathrm{ind}_{KZ}^G L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho} \rightarrow \mathcal{V}(\mathrm{ind}_{KZ}^G L_i)_{\widehat{P}_\rho} \rightarrow \mathcal{V}(\mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}))_{\widehat{P}_\rho} \rightarrow 0.$$

On obtient :  $\mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0))$  est un  $R(\bar{\rho})$ -module qui est un quotient de  $\mathcal{V}(\mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}))_{\widehat{P}_\rho}$ . Or,  $(\mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}))_{\widehat{P}_\rho}$  est soit nul, soit une des représentations  $\Pi(r, \lambda, \chi)$ . Pour terminer la démonstration du lemme il suffit de prouver que  $\mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0))$  est un  $R^{\mathrm{ps}}(\bar{\tau})$ -module de type fini.

Or, par les Lemmes 4.0.3 et 5.1.9  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$  est un  $\mathbb{F}[[S]]$ -module libre (de rang 1 ou 2) si non nul avec une surjection  $R^{\mathrm{ps}}(\bar{\tau}) \twoheadrightarrow \mathbb{F}[[S]]$ . En particulier  $\mathcal{V}(\Pi(r, \lambda, \chi))$ , donc  $\mathcal{V}(\mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}))_{\widehat{P}_\rho}$ , donc  $\mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0))$ , est un  $R^{\mathrm{ps}}(\bar{\tau})$ -module de type fini. □

Soit  $\alpha = \{\mathcal{V}(\pi_{\bar{\rho}})\}$ , où  $\pi_{\bar{\rho}}$  est l'élément de  $P_{\bar{\rho}}$  tel que  $\{\mathcal{V}(\pi_{\bar{\rho}})\}$  est l'unique sous-représentation irréductible non nulle de  $\bar{\rho}$ .

**Proposition 5.3.6.** *On a*

$$e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0), R^\psi(k, \tau, \psi)/\pi R^\psi(k, \tau, \psi)) \leq \mu_{\mathrm{aut}}(k, \tau, \psi).$$

*Démonstration.* On note  $e_\alpha(M)$  au lieu de  $e_\alpha(M, R^\psi(k, \tau, \psi)/\pi R^\psi(k, \tau, \psi))$ . Par récurrence on obtient :

$$e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0)) = \sum_i e_\alpha(\mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0))). \quad (5.3.7)$$

En effet

$$0 \rightarrow (V(U_0)/\pi V(U_0))_{i-1} \rightarrow (V(U_0)/\pi V(U_0))_i \rightarrow \mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0)) \rightarrow 0$$

est exacte ; donc pour la Proposition 3.1.16 on a :

$$e_\alpha((V(U_0)/\pi V(U_0))_i) = e_\alpha((V(U_0)/\pi V(U_0))_{i-1}) + e_\alpha(\mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0)))$$

et cela entraîne 5.3.7. Par la preuve précédente, on a une surjection de  $R^{\mathrm{ps}}(\bar{\tau})$ -modules :

$$\mathcal{V}(\mathrm{ind}_{KZ}^G (L_i/L_{i-1}))_{\widehat{P}_\rho} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0))$$

l'action de  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau})$  se factorisant par  $R^{\text{ps}}(\bar{\tau}) \rightarrow \mathbb{F}[[S]]$ . Comme

$$\dim \mathbb{F}[[S]] = \dim R^\psi(k, \tau, \psi) / \pi R^\psi(k, \tau, \psi) = 1,$$

on a :

$$e_\alpha(\text{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0))) = e_\alpha(\text{gr}_i(V(U_0)/\pi V(U_0)), \mathbb{F}[[S]]) \leq e_\alpha(\mathcal{V}(\text{ind}_{KZ}^G(L_i/L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho}), \mathbb{F}[[S]]).$$

Mais

$$\mathcal{V}(\text{ind}_{KZ}^G(L_i/L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } L_i/L_{i-1} \text{ n'est pas un poids de } \bar{\rho}^{\text{ss}} \\ \mathbb{F}[[S]] & \text{si } L_i/L_{i-1} \text{ est un poids et } \bar{\rho}^{\text{ss}} \text{ est réductible} \\ \mathbb{F}[[S]]^2 & \text{si } L_i/L_{i-1} \text{ est un poids et } \bar{\rho}^{\text{ss}} \text{ est irréductible} \end{cases}$$

donc on a

$$e_\alpha(\mathcal{V}(\text{ind}_{KZ}^G(L_i/L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho}), \mathbb{F}[[S]]) = \begin{cases} 0 & \text{si } L_i/L_{i-1} \text{ n'est pas un poids de } \bar{\rho} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

cela entraîne  $\sum_i e_\alpha(\mathcal{V}(\text{ind}_{KZ}^G(L_i/L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho}), \mathbb{F}[[S]]) = \mu_{\text{aut}}(k, \tau, \bar{\rho})$  d'où le résultat puisque

$$e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0)) \leq \sum_i e_\alpha(\mathcal{V}(\text{ind}_{KZ}^G(L_i/L_{i-1})_{\widehat{P}_\rho}), \mathbb{F}[[S]])$$

□

### 5.3.2 Deuxième majoration

On montre d'abord un fait élémentaire d'algèbre commutative :

**Proposition 5.3.8.** *Soit  $R$  un anneau réduit, noethérien et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier minimal. Alors :*

i. *Le localisé de  $R$  par rapport à  $\mathfrak{p}$  est le corps de fraction de  $R/\mathfrak{p}$*

ii. *On a une injection  $R \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \text{ minimal}} R_{\mathfrak{p}}$*

*Démonstration.* i. Comme  $R_{\mathfrak{p}}$  est noethérien, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^N = 0$ .

Mais  $R$  réduit entraîne  $(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) = 0$ . Or,  $\text{Frac}(R/\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  ce qui implique (i).

ii. En effet, soit  $r$  nul dans tous les  $R_{\mathfrak{p}}$ . L'annulateur  $I$  de  $r$  ne contient aucun idéal premier minimal. Ce n'est donc pas un idéal propre, à savoir  $I = 0$ .

□

**Définition 5.3.9.** *Un espace topologique  $X$  est dit*

i. *irréductible s'il est non vide et n'est pas réunion de fermés stricts ;*

ii. noethérien si toute suite décroissante de fermés est stationnaire.

**Proposition 5.3.10.** *Soit  $X$  un espace topologique non vide noethérien. Alors,  $X$  est réunion finie de fermés irréductibles  $X_i$ . L'ensemble des  $X_i$  est bien déterminé par  $X$  si on impose  $X_i \not\subseteq X_j$  pour tout  $i \neq j$  : c'est l'ensemble des fermés irréductibles maximaux de  $X$ , appelés composantes irréductibles.*

*Démonstration.* Voir [29, Proposition 49.11]. □

**Définition 5.3.11.** *Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $\eta \in X$  est générique si son adhérence est un fermé irréductible maximal de  $X$ .*

**Proposition 5.3.12.** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$*

- i. *Un fermé  $Y = V(I)$  de  $X$  est irréductible si et seulement si le radical de  $I$  est premier. En particulier  $X$  est irréductible si et seulement si  $A$  possède un unique idéal premier minimal (qui est alors le nilradical de  $A$ ).*
- ii. *Si  $A$  est noethérien, les composantes irréductibles de  $X$  sont les  $V(\mathfrak{p}_i)$  avec  $\mathfrak{p}_i$  idéal premier minimal de  $A$ .*

*Démonstration.* [23, Proposition 3.15]. □

**Proposition 5.3.13.** *Soit  $X = \text{Spec}(A)$  avec  $A$  noethérien. Alors  $X$  est un espace topologique noethérien.*

*Démonstration.* Voir [23, Proposition 3.2]. □

Comme on a déjà remarqué (cf. 3.3.4) l'anneau  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est noethérien, donc par 5.3.13  $\text{Spec}(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}))$  est un espace topologique noethérien et par 5.3.12 ses composantes irréductibles sont données par  $\text{Spec}R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier minimal. Comme  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est réduit on a  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}} = \text{Frac}(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})$  par la Proposition 5.3.8. Alors  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$  est le corps de fonctions de la composante irréductible correspondante à  $\mathfrak{p}$ .

**Définition 5.3.14.** *Supposons que  $Z \subset \text{Spec}R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est une composante irréductible. On dit que  $Z$  est de type irréductible si la représentation de  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}})$  est absolument irréductible et de type réductible sinon.*

On donne maintenant l'énoncé d'un résultat classique que on va utiliser par la suite :

**Lemme 5.3.15.** *Soit  $K$  un corps et  $V, W$  deux représentations d'un groupe  $G$  sur des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie non nuls. Supposons  $V$  absolument irréductible et soit  $P_\sigma(X) := \det((X - \sigma)|_V)$  pour  $\sigma \in K[G]$ . Si  $P_\sigma(\sigma)|_W = 0$  pour tout  $\sigma \in K[G]$  alors  $W$  a tous ses facteurs de Jordan-Hôlder sur  $K$  isomorphes à  $V$ .*

*Démonstration.* Voir [26, Lemma 1.6.11].  $\square$

**Lemme 5.3.16.** *Soit  $K$  un corps,  $G$  un groupe et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une action  $K$ -linéaire de  $G$ . Supposons que*

$$\text{Trace}(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g) \quad \text{avec} \quad \chi_i : G \rightarrow K^\times,$$

alors  $V^{\text{ss}} = \chi_1 \oplus \chi_2$ .

**Lemme 5.3.17.** *i. Si  $\bar{\rho}$  est absolument irréductible, alors toutes les composantes sont de type irréductible.*

*ii. Si  $\bar{\rho}$  est réductible et  $Z$  de type réductible, alors la représentation  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})$  est réductible de la forme  $\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 & * \\ 0 & \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix}$  où  $\tilde{\omega}_i : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow (R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})^\times$  relève  $\omega_i$ .*

*Démonstration.* i. Supposons par l'absurde qu'il existe une composante irréductible de type réductible :  $\text{Spec}(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})$ . Quitte à remplacer  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}$  par sa clôture intégrale dans l'extension finie de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}$  sur laquelle  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})$  deviendrait réductible, on peut supposer  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})$  réductible. Choisissons une base rendant cette représentation réductible. Il existe  $f \in R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}$  tel que  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2((R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})[1/f])$  est déjà réductible. Donc toute déformation de  $\bar{\rho}$  associée à un morphisme  $(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}) \rightarrow \mathcal{O}_{E'}$  qui envoie  $f$  dans un élément non nul est réductible. Cela est impossible puisque  $\bar{\rho}$  est absolument irréductible.

ii. En procédant comme au (i), on en déduit l'existence d'un ensemble de morphismes de  $\mathcal{O}_E$ -algèbres,  $x : R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p} \rightarrow \mathcal{O}_{E'}$ . A chaque  $x$  est associée  $\rho_x$ , une déformation réductible de  $\bar{\rho}$ . Alors  $\rho_x$  est une extension non triviale de  $\tilde{\omega}_{2,x}$  par  $\tilde{\omega}_{1,x}$ , où  $\tilde{\omega}_{1,x}, \tilde{\omega}_{2,x} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow (R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p})^\times$  relèvent  $\omega_1, \omega_2$ . On remarque que les morphismes ci-dessus donnent un ensemble de points Zariski-dense de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}$ . Comme  $\rho_x$  est de type  $(k, \tau, \psi)$  avec  $\psi|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \chi_{\text{cyc}}^{k-2} \det \tau$ , cela force  $\tau$  à être de la forme  $\tau = \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2$ , quitte à agrandir  $E$ , avec  $\varepsilon_i : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathcal{O}^\times$ . Les  $\varepsilon_i$  s'étendent à  $G_{\mathbb{Q}_p}$  puisque  $\tau$  est un type galoisien et :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1,x}|_{I_{\mathbb{Q}_p}} &= \chi_{\text{cyc}}^{k-1} \varepsilon_1 \\ \tilde{\omega}_{2,x}|_{I_{\mathbb{Q}_p}} &= \varepsilon_2. \end{aligned}$$

On fixe un tel  $x_0$  et on considère la pseudo-représentation donnée par :

$$\sigma \mapsto \tilde{\omega}_{1,x_0} \mu_T + \tilde{\omega}_{2,x_0} \mu_T^{-1}$$

où  $T = 1 + S$  et on note  $\mu_T$  le caractère non-ramifié qui envoie le Frobenius géométrique sur  $T$ . Elle est à valeurs dans  $\mathcal{O}[[S]]$  et correspond à une immersion fermée :

$$Z = \text{Spec}(\mathcal{O}[[S]]) \hookrightarrow \text{Spec}R^{\text{ps}}(\bar{\tau}).$$

De plus, un ensemble Zariski-dense de points de  $Z$  provient de points de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  par ce qui précède :

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \text{Spec}(R^{\text{ps}}(\bar{\tau})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z \times \text{Spec}(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) & \longrightarrow & \text{Spec}(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \end{array}$$

Comme  $Z \times \text{Spec}(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \hookrightarrow Z$  est une immersion fermée et l'image est Zariski-dense, on a un isomorphisme. Donc la représentation  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\mathfrak{p}) \simeq \text{GL}_2(\mathcal{O}[[S]])$  a pour trace  $\tilde{\omega}_{1,x_0}\mu_T + \tilde{\omega}_{2,x_0}\mu_T^{-1}$ . On conclut par le Lemme 5.3.16.  $\square$

**Proposition 5.3.18.** *Supposons  $\bar{\rho}$  irréductible. On a :*

$$e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})).$$

*Démonstration.* On note  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  la déformation  $G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{GL}_2(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}))$ . On veut montrer qu'il existe une injection de  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  dans  $V(U_0)$ . Soit  $\sigma \in R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ . Par définition

$$P_\sigma(X) = X^2 - \text{Trace}(\sigma)X + 1/2((\text{Trace}(\sigma))^2 - \text{Trace}(\sigma^2))$$

est le polynôme caractéristique de  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$  sur  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ . Il annule  $V_x$  pour tout  $x \in U_0$ . En effet l'opérateur  $\sigma^2 - \text{Trace}(\sigma)\sigma + \psi(\sigma)\chi_{\text{cyc}}(\sigma)$  agit sur  $V_x$  par 0. Mais  $V_x$  est par hypothèse de déterminant  $\psi\chi_{\text{cyc}}$ . Comme  $P_\sigma(X)$  annule tout  $V_x$ ,  $x \in U_0$ , il annule  $V(U_0)$ . Par le Lemme 5.3.17  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$  est absolument irréductible si  $\mathfrak{p}$  est minimal. On peut donc appliquer le Lemme 5.3.15 à  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$  et  $V(U_0) \otimes_{R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$ . On en déduit une injection  $G_{\mathbb{Q}_p}$ -équivariante de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ -espaces vectoriels :

$$V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes_{R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow V(U_0) \otimes_{R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}.$$

Par le Lemme 5.3.8, comme  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est réduit, on a :

$$R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \text{ minimal}} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$$

et si  $x \in \prod_{\mathfrak{p} \text{ minimal}} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$ , il existe  $f \notin \mathfrak{p}$  pour tout  $\mathfrak{p}$  tel que  $fx \in R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ . On a donc :

$$\begin{array}{ccc}
V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \otimes \prod_{\mathfrak{p}} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & V(U_0) \otimes \prod_{\mathfrak{p}} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}} \\
\uparrow & \nearrow & \\
V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) & & 
\end{array}$$

On sait que  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  est libre de rang 2 sur  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ , donc il existe  $f \in R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  tel que  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \hookrightarrow 1/f V(U_0) \subset V(U_0)[1/f]$ . On note  $V(U_0)[f]$  la  $f$ -torsion de  $V(U_0)$ . Soit  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tel que  $V(U_0)[f]$  est tuée par  $f^m$ . On a :

$$V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \hookrightarrow \frac{1}{f} V(U_0) \xrightarrow{\times f} \frac{V(U_0)}{V(U_0)[f]} \xrightarrow{\times f^m} V(U_0)$$

où la flèche au milieu est un isomorphisme. On en déduit que  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \hookrightarrow V(U_0)$  est un injection de  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$ -modules commutant à  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . Toujours par la Proposition 3.1.16 on a  $e_\alpha(V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}))$ . Mais comme  $\bar{\rho}$  est irréductible, il est clair que  $e_\alpha(V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}))$ , ce qui entraîne la proposition.  $\square$

**Proposition 5.3.19.** *Supposons  $\bar{\rho}$  réductible. On a :*

$$e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})).$$

*Démonstration.* On note  $I^{\text{irr}}$  l'idéal correspondant aux composantes de type irréductible et  $I^{\text{red}}$  celui correspondant aux composantes de type réductible.

Comme l'application

$$R^\psi(k, \tau, \bar{\rho}) \rightarrow I^{\text{irr}} \oplus I^{\text{red}}$$

est un isomorphisme sur les points génériques, on a :

$$e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi) = e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}})) + e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{red}}))$$

par la Proposition 3.1.18. On va majorer chaque terme dans la somme de droite.

Exactement la même preuve que dans le cas  $\bar{\rho}$  irréductible en travaillant avec  $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/I^{\text{red}}$  donne :

$$e_\alpha(V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}}), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}})) \leq e_\alpha(V(U_0), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}}))$$

et on a :

$$e(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}})) = e_\alpha(V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}}), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}}))$$

puisque  $\bar{\rho}$  est réductible et qu'on ne compte qu'un facteur de Jordan-Hölder sur 2.

Si  $\mathfrak{p}$  est de type réductible, alors

$$V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/I^{\text{red}} \otimes_{R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/I^{\text{red}}} R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$$

possède un sous- $R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})_{\mathfrak{p}}$ -espace vectoriel de dimension 1 sur lequel  $G_{\mathbb{Q}_p}$  agit par  $\tilde{\omega}_1$  par le Lemme 5.3.17. Soit  $v_{\mathfrak{p}}$  un vecteur de base de ce sous-espace vectoriel. En raisonnant comme dans la Proposition 5.3.18, on peut trouver  $f \in R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})$  non diviseur de 0, tel que  $v := (fv_{\mathfrak{p}})$  provient de  $V^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/I^{\text{red}}$ , et  $G_{\mathbb{Q}_p}$  agit sur  $v$  par un caractère  $\tilde{\omega}_1$  tel que  $\tilde{\omega}_1$  relève  $\omega_1$ . Si  $x$  est sur une composante de  $I^{\text{red}}$ , alors  $\sigma - \tilde{\omega}_1(\sigma)$  est nul sur chaque  $V(x) \hookrightarrow V_x$  et donc sur  $V(U_0)/I^{\text{red}}$ . En reproduisant la même preuve que pour  $\bar{\rho}$  irréductible, on obtient

$$\left(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/I^{\text{red}}\right) \cdot v \hookrightarrow V(U_0)/I^{\text{red}}$$

ce qui entraîne

$$e_\alpha\left(\left(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{red}})\right) \cdot v\right) \leq e_\alpha(V(U_0)/(\pi, I^{\text{red}}), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{red}})).$$

Or, comme  $f$  n'est pas diviseur de 0, on a :

$$e\left(\left(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{red}})\right)\right) = e_\alpha\left(\left(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{red}})\right) \cdot v\right)$$

Donc

$$\begin{aligned} e(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi) &\leq e_\alpha(V(U_0)/(\pi, I^{\text{red}}), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{red}})) + e_\alpha(V(U_0)/(\pi, I^{\text{irr}}), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/(\pi, I^{\text{irr}})) \\ &= e_\alpha(V(U_0)/(I^{\text{red}}, \pi), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi) + e_\alpha(V(U_0)/(I^{\text{irr}}, \pi), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi). \end{aligned}$$

Comme l'application

$$V(U_0) \rightarrow V(U_0)/I^{\text{irr}} \oplus V(U_0)/I^{\text{red}}$$

est un isomorphisme sur tous les points génériques on a finalement par la Proposition 3.1.18

$$e_\alpha(V(U_0)/(I^{\text{red}}, \pi), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi) + e_\alpha(V(U_0)/(I^{\text{irr}}, \pi), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi) = e_\alpha(V(U_0)/\pi, R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi).$$

et donc

$$e(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi) \leq e_\alpha(V(U_0)/\pi, R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi)$$

ce qui termine la preuve. □

### 5.3.3 Fin de la preuve

**Théorème 5.3.20.** *Soit  $k$  un entier  $\geq 2$ . Soit  $\tau : I_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$  un type galoisien et  $\psi : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow O^\times$  un caractère continu telle que  $\psi \chi_{\mathrm{cyc}}^{2-k} |_{I_{\mathbb{Q}_p}} \sim \det \tau$ .*

*Supposons que*

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$$

*est soit absolument irréductible soit une extension non triviale de  $\omega_2$  par  $\omega_1$ , où  $\omega_1, \omega_2 : G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{F}^\times$  sont des caractères distincts avec  $\omega_1 \neq \omega_2$ .*

*Alors :*

$$e(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq \mu_{\mathrm{aut}}(k, \tau, \bar{\rho}).$$

*Démonstration.* Par la Proposition 5.3.6, on a :

$$e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0), R^\psi(k, \tau, \psi)/\pi R^\psi(k, \tau, \psi)) \leq \mu_{\mathrm{aut}}(k, \tau, \psi).$$

Et on a :

$$e_\alpha(R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})) \leq e_\alpha(V(U_0)/\pi V(U_0), R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})/\pi R^\psi(k, \tau, \bar{\rho})).$$

par les Propositions 5.3.18 et 5.3.19.

On peut donc conclure. □

# Annexe A

## Vecteurs de Witt

Soit  $p$  un nombre premier. Soient  $(X_0, \dots, X_n, \dots)$  et  $(Y_0, \dots, Y_n, \dots)$ , deux suites d'in-déterminées et considérons les polynômes suivants (appelés "polynômes de Witt") :

$$\begin{aligned}
 W_0 &= X_0 \\
 W_1 &= X_0^p + pX_1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 W_n &= \sum_{i=0}^{i=n} p^i X_i^{p^{n-i}} = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n X_n \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

On a le théorème suivant :

**Théorème A.0.1.** *Pour tout  $\Phi \in \mathbb{Z}[X, Y]$ , il existe une suite  $(\phi_0, \dots, \phi_n, \dots)$  d'éléments de  $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n, \dots; Y_0, \dots, Y_n, \dots]$  et une seule telle que l'on ait :*

$$W_n(\phi_0, \dots, \phi_n, \dots) = \Phi(W_n(X_0, \dots), W_n(Y_0, \dots)), \quad n = 0, 1, \dots$$

*Démonstration.* Voir [32, Théorème 5]. □

Notons maintenant  $S_0, \dots, S_n, \dots$ , (resp.  $P_0, \dots, P_n, \dots$ ) les polynômes  $\phi_0, \dots, \phi_n$  associés par le procédé du Théorème A.0.1 au polynôme

$$\Phi(X, Y) = X + Y \quad (\text{resp. } \Phi(X, Y) = X.Y).$$

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n, \dots)$ ,  $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_n, \dots)$  des éléments de  $A^{\mathbb{N}}$ . On posera :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (S_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \dots, S_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \dots) \\
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (P_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \dots, P_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \dots).
 \end{aligned}$$

**Théorème A.0.2.** *Les lois de composition définies ci-dessus font de  $A^{\mathbb{N}}$  un anneau commutatif à élément unité, appelé l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $A$ , et noté  $W(A)$ .*

*Démonstration.* Voir [32, Théorème 6]. □

Au lieu de considérer des vecteurs de longueur infinie, on peut se borner à considérer des vecteurs  $(a_0, \dots, a_n)$  à  $n$  composantes. Comme les polynômes  $\phi$  ne font intervenir que les variables d'indice  $\leq i$ , on en conclut que ces vecteurs forment un anneau  $W_n(A)$ , quotient de  $W(A)$ , que l'on appelle *l'anneau des vecteurs de Witt de longueur  $n$* . On a  $W_1(A) = A$ . L'anneau  $W(A)$  est limite projective des anneaux  $W_n(A)$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

#### A.0.4 Les applications $\mathcal{V}$ , $r$ et $\varphi$

Si  $\mathbf{a} = (0, a_0, \dots, a_{n-1}, \dots)$  est un vecteur de Witt, on définit le vecteur  $\mathcal{V}(\mathbf{a})$  par la formule :

$$\mathcal{V}(\mathbf{a}) = (0, a_0, \dots, a_{n-1}, \dots) \quad \text{“décalage”}.$$

L'application  $\mathcal{V} : W(A) \rightarrow W(A)$  est additive. En effet, il suffit de le vérifier lorsque  $p$  est inversible dans  $A$ . Or, l'homomorphisme

$$W : W(A) \rightarrow A^{\mathbb{N}}$$

qui fait correspondre à un vecteur de Witt  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n, \dots)$  l'élément de l'anneau produit  $A^{\mathbb{N}}$  qui a pour coordonnées les  $W_n(a)$ , transforme  $\mathcal{V}$  en l'application qui fait passer de  $(w_0, w_1, \dots)$  à  $(0, pw_0, \dots)$ .

Par passage au quotient, on déduit de  $\mathcal{V}$  une application additive de  $W_n(A)$  dans  $W_{n+1}(A)$ . On a des suites exactes :

$$0 \rightarrow W_k(A) \xrightarrow{\mathcal{V}^r} W_{k+r}(A) \rightarrow W_r(A) \rightarrow 0.$$

Si  $x \in A$ , on pose :

$$r(x) = (x, 0, \dots, 0, \dots).$$

On définit ainsi une application  $r : A \rightarrow W(A)$ . Lorsque  $p$  est inversible dans  $A$ ,  $W$  transforme  $r$  en l'application qui fait passer de  $x$  à  $(x, x^p, \dots, x^{p^n}, \dots)$ . On en déduit par le même raisonnement que ci-dessus, les formules :

$$r(xy) = r(x).r(y), \quad x, y \in A$$

$$(a_0, a_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}^n(r(a_n)), \quad a_i \in A$$

$$r(x).(a_0, \dots) = (xa_0, x^p a_1, \dots, x^{p^n} a_n, \dots), \quad x, a_i \in A.$$

---

Supposons que  $k$  soit un anneau de caractéristique  $p$  (non nécessairement parfait). L'application  $x \rightarrow x^p$  est un homomorphisme de  $k$  dans  $k$ . Elle définit donc une application  $\varphi : W(k) \rightarrow W(k)$  donnée par la formule :

$$\varphi(a_0, a_1, \dots) = (a_0^p, a_1^p, \dots)$$

qui est un homomorphisme d'anneaux.

**Théorème A.0.3.** *Si  $k$  est un anneau parfait de caractéristique  $p$ ,  $W(k)$  est un  $p$ -anneau strict d'anneau résiduel  $k$ .*

*Démonstration.* Voir [32, Théorème 7]. □



# Bibliographie

- [1] L. Barthel, R. Livné, *Irreducible modular representation of  $GL_2$  of a local field*, Duke Math. J. **75**, 261-292 (1994).
- [2] L. Barthel, R. Livné, *Modular representation of  $GL_2$  of a local field : the ordinary, unramified case*, J. Number Theory **55**, n.1, 1-27 (1995).
- [3] L. Berger, C. Breuil *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , Asterisque, à paraître.
- [4] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  I en  $l = p$* , Compositio Math **138**, 165-188, (2003).
- [5] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  II*, J. Inst. Math. Jussieu **2**, 1-36, (2003).
- [6] C. Breuil, *Representations of Galois and of  $GL_2$  in characteristic  $p$* , notes d'un cours donné à l'université de Columbia (NYC) durant l'automne 2007 disponible sur <http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html>
- [7] C. Breuil,  *$p$ -adic Hodge theory, deformations and local Langlands*, Note du cours à Barcelona (2001) , disponible sur <http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html>
- [8] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor *On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$  : wild 3-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc., **14**, 843-939, 2001.
- [9] C. Breuil, M. Emerton *Représentations  $p$ -adiques ordinaires de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et compatibilité local-global*, à paraître à Asterisque.
- [10] C. Breuil, A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$  et de  $Gal(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  en  $l = p$* , Duke Mathematical Journal, Vol. **115**, N.2 (2002).
- [11] C. Bushnell, G. Henniart, *The Local Langlands Conjecture for  $GL(2)$* , Springer, (2006).
- [12] P. Colmez, *Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\phi, \Gamma)$ -modules*, preprint (2009).
- [13] P. Colmez, *Espaces de Banach de dimension finie*. Disponible sur <http://www.math.jussieu.fr/~colmez/publications.html>
- [14] P. Colmez, *La série principale unitaire de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , preprint (2007).

- 
- [15] B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, *Potentially Barsotti-Tate Galois Representations*, Journal American Society, **12** (1999).
- [16] F. Diamond, *On deformation rings and Hecke rings*, Ann. Math, **144**, 137-166, 1999.
- [17] B. De Smit, H. Lenstra, *Explicit construction of Universal Deformation Rings* dans Modular forms and Fermat's Last Theorem, par G. Cornell, J.H. Silvermann, et G. Stevens, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [18] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, Astérisque **223**, Soc. Math. de France, pp. 59-111, 1994.
- [19] J.-M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. Math. de France, pp. 113-184, 1994.
- [20] J.-M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux*, Prog. in Math. **87**, 249-309, Birkhäuser 1991.
- [21] J.-M. Fontaine, B. Mazur *Geometric Galois Representations*, Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem, Cambridge, MA, 41-78, Birkhäuser 1995.
- [22] E. Ghate, A. Mézard, *Filtered Modules with coefficients*, disponible sur <http://www.math.uvsq.fr/~mezard/papier>.
- [23] D. Harari, *Géométrie Algébrique, M2*, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/~harari/>, 2008.
- [24] H. Jacquet, R. Langlands *Automorphic forms on  $GL(2)$* , Lecture Notes in Math. **114**, Springer Verlag, 1971.
- [25] M. Kisin, *Potentially semi-stable deformation rings*, Journal of the american mathematical society **21**, 513-546, 2008.
- [26] M. Kisin, *The Fontaine Mazur Conjecture for  $GL_2$* , Journal of the american mathematical society, Article electronically published on January 21 2009.
- [27] M. Kisin, *Deformation of  $G_{\mathbb{Q}_p}$  and  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  representations*, preprint, 2008.
- [28] P. Kutzko, *The Langlands conjecture for  $GL(2)$  of a local field*, Ann. of Math. **112**, 381-412, 1980.
- [29] Y. Laszlo, *Cours accéléré (M2) : Rappels et compléments d'algèbre-géométrie*, disponible sur <http://www.math.polytechnique.fr/~laszlo/>, 2008.
- [30] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, **8**.
- [31] Serre J.-P., *Sur les représentations modulaires de degré 2 de  $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Duke Math. J. **54**, 179-230, (1987).
- [32] Serre J.-P., *Corps locaux*, 4<sup>ième</sup> édition, Hermann, (1968).
- [33] J. Tate, H. Lenstra,  *$p$ -Divisible Groups*, Proc. of a Conf. on Local Fields, Driebergen, Springer, 1967, 158-183.

- 
- [34] R. Taylor, *Galois Representations associated to Siegel Modular forms of low Weight*, Duke Math. Journal, t. **63** n°2, 281-332, 1991.
- [35] R. Taylor, *On the meromorphic continuation of degree 2 L-functions*, Documenta **John Coates' Sixtieth Birthday**, 729-779, 2006.
- [36] R. Taylor, A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2) , **141**, 553-572, 1995.
- [37] A. Wiles, *On ordinary  $\lambda$ -adic Representation Associated to Modular Forms*, Invent. Math. , **94**, 529-573, 1988.