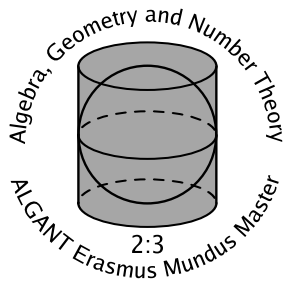


Représentations convexes-cocompactes dans
 $SO(n, 1)$ de réseaux uniformes de complexes
polygonaux

Marc Desgroseilliers



UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11

Mémoire de M2 en Mathématiques, Année 2009-2010
Université Paris-Sud XI

Sous la direction de Frédéric Haglund
Université Paris-Sud XI

Table des matières

1	Introduction	4
2	Espaces hyperboliques et $CAT(\kappa)$	7
2.1	Espaces hyperboliques au sens de Gromov	7
2.2	Espaces métriques $CAT(\kappa)$	8
3	Quasi-isométries, ensembles quasi-convexes et représentations équivariantes	10
4	Complexes polyédraux et hyperplans	14
4.1	Complexes cubiques et complexes polygonaux pairs	14
4.2	Hyperplans pathologiques	18
4.3	Cas des complexes $CAT(0)$	19
5	Polygones de groupes	20
5.1	Définitions	20
5.2	Courbure et angles	22
6	Plongement quasi-isométrique de complexes polygonaux dans \mathbb{H}^p	24
7	Construction	28
7.1	Action de Γ'	28
7.2	De Γ' à Γ	32
7.3	De la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes	34
8	Représentation des polygones de groupes selon Kapovich	34

8.1	Séparabilité des sous-groupes quasi-convexes et conséquences	35
8.2	Représentation	39
8.3	Les deux représentations coïncident	43
9	Plongement quasi-isométrique de complexes polygonaux $CAT(0)$	43
9.1	Les complexes polygonaux pairs $CAT(0)$ et leurs hyperplans .	44
9.2	Convexité combinatoire des hyperplans et démonstration . . .	45

1 Introduction

Depuis leur introduction par M. Gromov pendant les années 1980, les groupes hyperboliques ont fait l'objet d'une étude approfondie. Comme leur nom le laisse deviner, les groupes hyperboliques partagent certaines de leurs propriétés avec les sous-groupes discrets et convexe-cocompacts du groupe des isométries de l'espace hyperbolique réel, même s'ils forment une classe beaucoup plus grande. Le but de ce mémoire est de présenter l'article "Representations of polygons of finite groups" de Michael Kapovich, où ce dernier fournit un élément de réponse à la question : quels groupes hyperboliques peuvent agir isométriquement et de façon proprement discontinue sur l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^p pour un certain p ?

Dans son article, Kapovich mentionne qu'il n'y a qu'un nombre très restreint d'obstructions connues empêchant la construction d'une telle action. Mentionnons notamment que pour un groupe infini ayant la propriété (T) de Kazhdan, toute représentation dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^p fixera nécessairement un point et ne pourra donc pas être proprement discontinue et ce pour toute les valeurs de p . En ses mots, Kapovich cherche à trouver "a better "demarcation line" between hyperbolic groups satisfying property (T) and groups acting discretely on real-hyperbolic spaces". Dans cette direction, il démontre le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soient \mathcal{P} un polygone à angles aigus de groupes fini ayant un nombre pair de côtés et G son groupe fondamental. Alors le groupe G admet une action discrète, fidèle et convexe-cocompacte ρ sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^p pour un certain $p < \infty$ dépendant de \mathcal{P} .*

En effet, pour \mathcal{P} et G comme ci-dessus, Kapovich construit un plongement quasi-isométrique et G -équivariant du revêtement universel de \mathcal{P} associé. Ceci fournit une représentation discrète, fidèle et convexe-cocompacte de G dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^p . Alors que Kapovich utilise crucialement la structure de polygone de groupes finis, nous offrons ici une construction alternative qui peut s'appliquer à un éventail plus large de complexes polygonaux.

Théorème 1.2. *Soit X un complexe polygonal pair régulier $CAT(0)$ dont la maille du link de chaque sommet est supérieure ou égale à quatre. Supposons de plus que chaque polygone de X possède au moins huit côtés. Soit Γ un réseau uniforme de X . Supposons que Γ est virtuellement spécial, c'est-à-dire que ses sous-groupes quasi-convexes sont séparables. Alors il existe une*

représentation proprement discontinue et convexe-cocompacte de Γ dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.3. *Soit X un complexe polygonal pair régulier $CAT(0)$ dont la maille du link de chaque sommet est supérieure ou égale à quatre. Supposons de plus que chaque polygone de X possède au moins huit côtés. Soit Γ un réseau uniforme de X . Supposons qu'il existe un sous-groupe distingué, sans torsion et d'indice fini Γ' de Γ tel que les hyperplans ramifiés de $\Gamma' \backslash X$ soient plongés, sans auto-tangence et sans auto-tangence d'ordre deux. Alors il existe une représentation proprement discontinue et convexe-cocompacte de Γ dans le groupe $\text{Isom}(\mathbb{H}^p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.*

La construction de Kapovich, tout comme l'alternative que nous proposons, s'appuie de façon essentielle sur le fait que les polygones ont un nombre pair de côtés afin de définir des sous-espaces de codimension un. Dans son article, Kapovich réussit tout de même à construire une représentation lorsque le polygone à angles aigus de groupes fini a un nombre impair de côtés, mais seulement lorsque les groupes de sommets ont une forme très particulière : un groupe de sommet est le produit direct des groupes d'arête adjacents.

Finalement, alors que la construction de représentations convexe-cocompactes dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^p occupe la plus grande partie de l'article considéré, Kapovich s'attaque aussi à la question de la linéarité des groupes hyperboliques au sens de Gromov, en construisant des exemples de groupes hyperboliques qui ne sont pas linéaires. En fait, il montre qu'un quotient hyperbolique non élémentaire G d'un réseau uniforme Γ dans l'espace hyperbolique quaternionien ne peut pas être linéaire puisque tout morphisme de $\rho : G \rightarrow GL(m, k)$ se factorise à travers un groupe fini, pour k un corps arbitraire. Cet aspect ne sera pas traité dans ce mémoire.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Les sections 2 et 3 introduisent une notion généralisée d'espaces à courbure négative ainsi que de nombreuses définitions et concepts utiles pour étudier ces espaces. Dans la section 4, nous portons notre attention aux complexes polyédraux et à certains convexes qui séparent l'espace en deux, les hyperplans. En s'inspirant de la construction de Kapovich, nous étudions aussi des sous-espaces de codimension un qui séparent l'espace en plus de deux parties, les hyperplans ramifiés. La section 5 est dédiée aux polygones de groupes, particulièrement ceux ayant certaines propriétés de courbure négative. Dans la section 6, nous présentons un résultat de Kapovich qui permet de construire un plongement quasi-isométrique de certains complexes polygonaux $CAT(0)$ vers l'espace

hyperbolique. Notre construction utilisant les groupes de Coxeter est présentée dans la section 7. La section 8 est dédiée à la construction de Kapovich que nous mettons en parallèle avec la construction de la section 7. Finalement, la section 9 est consacrée à un résultat concernant les applications polygonales d'espaces $CAT(0)$ utilisé dans la section 7.

Remerciements

En premier lieu, je remercie de tout coeur mon superviseur Frédéric Haglund pour les nombreuses conversations mathématiques stimulantes que nous avons partagées ainsi que pour sa patience infinie. Je remercie aussi les familles Desgroseilliers, Lussier et Frosio pour leur support et leurs encouragements.

2 Espaces hyperboliques et $CAT(\kappa)$

Les espaces δ -hyperboliques et les espaces $CAT(\kappa)$ pour $\kappa < 0$ tentent de capturer, à travers certaines propriétés des triangles d'un espace métrique, la géométrie à grande échelle des variétés riemanniennes à courbure négative.

2.1 Espaces hyperboliques au sens de Gromov

Nous nous bornons à énoncer ce qui nous sera utile par la suite. Pour retrouver les énoncés de cette section, ainsi que de nombreux exemples et définitions connexes, nous référons le lecteur à [5].

Tout d'abord, nous nous intéressons à des espaces métriques qui respectent notre intuition de chemin minimisant la distance, au sens où il existe toujours un chemin le plus court entre deux points.

Définition 2.1. Un espace métrique M est dit *géodésique* si, pour tout couple $x, y \in M$, il existe une isométrie de l'intervalle $[0, d]$ de \mathbb{R} vers M , $h : [0, d] \rightarrow M$, avec $h(0) = x, h(d) = y$, où l'on a noté d la distance entre x et y . Une telle isométrie est une *géodésique* (globale) entre ses extrémités x et y et nous noterons $[x, y]$ une telle géodésique. Un sous-espace Y de M est dit *convexe* si toute géodésique joignant deux points de Y est entièrement contenue dans Y .

Définition 2.2. [5, Définitions 25] Soit X un espace métrique géodésique. Un *triangle géodésique* sur trois points x, y, z est la réunion de trois géodésiques joignant ces points deux à deux. On dénote un triangle géodésique sur x, y et z par $\{[x, y], [y, z], [z, x]\}$ et les points x, y et z sont appelés les *sommets* de ce triangle géodésique. Le *périmètre* du triangle géodésique est la somme de la longueur de ses côtés.

Définition 2.3. Soit (X, d) un espace métrique géodésique. Pour $\delta \geq 0$, on dit que X est un espace δ -*hyperbolique* si, pour tout triple de points $\{x, y, z\}$ dans X , et tout triangle géodésique sur ces points, la condition suivante est satisfaite :

$$\text{Pour tout } v \in [x, y], d(v, [y, z] \cup [x, z]) \leq \delta$$

Intuitivement, cette définition dit que les triangles de X sont en quelque sorte fins si on les regarde de loin. On dit qu'un espace métrique est *hyperbolique au sens de Gromov*, ou tout simplement *hyperbolique* s'il est δ -hyperbolique pour un certain $\delta \geq 0$.

Remarque 2.4. L'espace \mathbb{H}^2 est log 3-hyperbolique et donc hyperbolique au sens de Gromov.

Définition 2.5. [5] Un graphe est muni d'une métrique naturelle : chaque arête est déclarée isométrique à l'intervalle de longueur un de \mathbb{R} et la distance entre deux points est défini comme l'infimum de la longueur des chemins joignant ces deux points. Un groupe de type fini est dit *hyperbolique* si pour un certain ensemble générateur, son graphe de Cayley est un espace métrique hyperbolique pour cette métrique naturelle.

Observation 2.6. Cette définition ne dépend pas du choix de générateurs pour le graphe de Cayley.

2.2 Espaces métriques $CAT(\kappa)$

Dans cette section, nous présentons la notion d'espace métrique $CAT(\kappa)$, qui se veut une généralisation de la courbure aux espaces métriques géodésiques. Fixons donc $\kappa \in \mathbb{R}$ et soient M_κ la variété riemannienne simplement connexe, complète, de courbure constante κ . Soit D_κ le diamètre de cette variété, qui sera ∞ si $\kappa \leq 0$.

L'essence de la définition d'espace $CAT(\kappa)$ est de demander que les triangles de l'espace considéré soit au moins aussi fins que les triangles de la variété riemannienne (complète et simplement connexe) à courbure constante κ .

Définition 2.7. [2, Part I, Lemma 2.14] Étant donné un triangle géodésique $\Delta = \{[x, y], [y, z], [z, x]\}$ dans un espace métrique géodésique X , un *triangle de comparaison* est un triangle géodésique $\Delta' = \{[x', y'], [y', z'], [z', x']\} \subset M_\kappa$ tel que $d(x, y) = d(x', y')$, $d(y, z) = d(y', z')$ et $d(x, z) = d(x', z')$, si un tel triangle géodésique existe. Le *point de comparaison* pour un point $p \in [x, y]$ est le point $p' \in [x', y']$ tel que $d(x, p) = d(x', p')$.

Dans le cas où le périmètre du triangle géodésique dans X est inférieur à $2D_\kappa$, un tel triangle de comparaison existe toujours et est unique à isométrie près (voir [2, Part I, Lemma 2.14]).

Définition 2.8. [2, Part II, 1.1 Definition of a $CAT(\kappa)$ space] Soient Δ un triangle géodésique et $\Delta' \subset M_\kappa$ un triangle de comparaison. Δ satisfait la condition $CAT(\kappa)$ si, pour tout $x, y \in \Delta$, $d(x, y) \leq d(x', y')$ où x' et y' sont

les points de comparaison dans Δ' de x et y respectivement.

Pour $\kappa \leq 0$, un espace métrique géodésique est dit (globalement) $CAT(\kappa)$ si tous ses triangles géodésiques satisfont la condition $CAT(\kappa)$. Pour $\kappa > 0$, un espace métrique géodésique est dit (globalement) $CAT(\kappa)$ si tout point peut être joint par une géodésique dont la longueur est inférieure à D_κ et si tout triangle géodésique dont le périmètre est inférieur à $2D_\kappa$ est $CAT(\kappa)$. Un espace métrique géodésique est *localement* $CAT(\kappa)$ si pour tout point, on peut trouver une boule autour de ce point qui soit $CAT(\kappa)$ avec la métrique induite par la restriction. Un espace métrique est dit à *courbure négative ou nulle* (respectivement à *courbure strictement négative*) s'il est localement $CAT(\kappa)$ pour $\kappa \leq 0$ (respectivement $\kappa < 0$).

Afin de familiariser le lecteur n'ayant jamais rencontré cette définition, nous énumérons ici quelques propriétés des espaces $CAT(\kappa)$. Tout d'abord, une définition qui capture l'idée de préserver localement les distances :

Définition 2.9. [2, Part I, Definitions 1.3] Une *géodésique locale* dans un espace métrique géodésique X est une application λ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans X avec la propriété que pour tout $t \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t', t'' \in I$ avec $\max\{d_{\mathbb{R}}(t, t'), d_{\mathbb{R}}(t, t'')\} < \epsilon$, $d_X(\lambda(t'), \lambda(t'')) = d_{\mathbb{R}}(t', t'')$.

Proposition 2.10. [2, Part II, Proposition 1.4] Soit X un espace $CAT(\kappa)$.

1. Il existe une unique géodésique entre deux points x et y de X (en supposant que $d(x, y) < D_\kappa$ si $\kappa > 0$) et celle-ci dépend continument de ses extrémités.
2. Les boules de rayon inférieur à $D_\kappa/2$ sont convexes.
3. Toute géodésique locale de longueur inférieure à D_κ est en fait une géodésique globale.
4. Les boules de rayon inférieur à D_κ sont contractiles.

Observation 2.11. Supposons que $\kappa \leq 0$. Alors l'affirmation (2) implique qu'un espace métrique géodésique $CAT(\kappa)$ est contractile et donc simplement connexe. De plus, l'affirmation (3) nous indique que toute géodésique locale est en fait une géodésique globale. Il s'agit là d'un cas de passage du local au global dans les espaces $CAT(0)$, dont le prochain énoncé est un autre exemple.

Théorème 2.12. [2, Part II, The Cartan-Hadamard Theorem] Pour $\kappa \leq 0$, un espace métrique connexe et complet, au sens où les suites de Cauchy convergent, est globalement $CAT(\kappa)$ si et seulement s'il est localement

$CAT(\kappa)$ et simplement connexe. On peut reformuler ceci en disant qu'un tel espace est localement $CAT(\kappa)$ si et seulement si son revêtement universel est globalement $CAT(\kappa)$.

Finalement, nous présentons un critère de séparation qui sera utile par la suite.

Définition 2.13 (Notion d'angle). [2, Part I, Definition 1.12] Soit X un espace métrique géodésique $CAT(\kappa)$. Soit $c : [0, a] \rightarrow X$ et $c' : [0, a'] \rightarrow X$ deux géodésiques telles que $c(0) = c'(0)$. Pour $t \in [0, a]$ et $t' \in [0, a']$, nous considérons le triangle géodésique sur les points $c(0)$, $c(t)$ et $c'(t')$ et l'angle de comparaison associé $\bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ dans le triangle de comparaison. Nous définissons alors l'angle (d'Alexandrov) entre les deux géodésiques par

$$\angle(c, c') := \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$$

Remarque 2.14. Dans un espace globalement $CAT(0)$, deux sous-espaces convexes dont l'intersection est non vide ne peuvent partager une perpendiculaire commune, c'est-à-dire un segment géodésique reliant les deux convexes et faisant un angle de $\pi/2$ avec chacun. En effet, ceci fournirait un triangle géodésique dont la somme des angles intérieurs est supérieure à π .

3 Quasi-isométries, ensembles quasi-convexes et représentations équivariantes

Comme déjà énoncé, les espaces hyperboliques tentent de capturer l'idée de la géométrie à grande échelle. Il est donc utile d'avoir une notion d'application entre espaces métriques géodésiques qui soit à la fois assez forte pour conserver les propriétés intéressantes à grande échelle et assez générale pour ne pas introduire de distinctions entre espaces n'étant différents que localement. Ce rôle est joué par les applications appelées quasi-isométries.

Définition 3.1 (Quasi-isométrie). Une application entre deux espaces métriques $F : M_1 \rightarrow M_2$ est un (λ, ϵ) -plongement quasi-isométrique si pour tout $x, y \in M_1$

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - \epsilon \leq d_2(F(x), F(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \epsilon$$

Un plongement quasi-isométrique est appelé une *quasi-isométrie* s'il est "*quasi-surjectif*" : tout point de M_2 est à une distance $\leq \epsilon$ d'un point de $F(M_1)$. Une (λ, ϵ) -*quasi-géodésique* est l'image par un (λ, ϵ) -plongement quasi-isométrique d'un intervalle de \mathbb{R} .

Définition 3.2. Dans un espace métrique géodésique, l'*enveloppe convexe* de Y , notée $C(Y)$ est définie comme l'intersection de tous les sous-espaces convexes fermés contenant Y . Les convexes étant pris fermés, l'enveloppe convexe sera donc en particulier fermée.

Il est utile d'avoir une notion analogue à la convexité, plus faible mais plus robuste quant aux quasi-isométries. (Voir la preuve de 3.12).

Définition 3.3 (Quasi-convexité). Soit Y un sous-espace d'un espace métrique géodésique X et $k \in \mathbb{R}$. Le k -voisinage de Y est défini comme l'ensemble des points de X à distance inférieure ou égale à k de Y , $Vois_k(Y) := \{x \in X : d(x, Y) \leq k\}$. Y est dit *k-quasi-convexe* si pour tout $y_1, y_2 \in Y$, toute géodésique joignant y_1 à y_2 est contenue dans le k -voisinage de Y . Un sous-ensemble est *quasi-convexe* s'il est k -quasi-convexe pour un certain k .

Définition 3.4 (Sous-groupe quasi-convexe). [2, Part III.Γ, Lemma 3.5] Soit G un groupe hyperbolique et $Cayley(G)$ un graphe de Cayley de G fixé. Un sous-groupe H de G est dit *quasi-convexe* s'il est quasi-convexe, vu comme sous-espace de $Cayley(G)$. Ceci est équivalent à demander que l'application $H \rightarrow G$ soit un plongement quasi-isométrique et donc cette définition ne dépend pas du choix de graphe de Cayley.

Dans la suite, nous travaillerons avec l'espace hyperbolique réel \mathbb{H}^p et nous utiliserons la représentation conforme. Plus précisément, l'espace hyperbolique \mathbb{H}^p a comme modèle la boule unité B^p de dimension p privée du bord et équipée de la métrique suivante :

$$\cosh d_B(x, y) = 1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

Cet espace a une compactification $\overline{\mathbb{H}^p} = \mathbb{H}^p \cup S^{p-1}$. Dans la suite, nous dénoterons par \overline{S} l'adhérence d'un sous-espace $S \subset \mathbb{H}^p$ dans $\overline{\mathbb{H}^p}$. $\overline{\mathbb{H}^p} \setminus \mathbb{H}^p$ sera aussi dénoté par $\partial\mathbb{H}^p$. De plus, nous noterons $Span_{\mathbb{H}^p}(S)$ le plus petit sous-espace contenant toutes les géodésiques bi-infinies étendant une géodésique de S non réduite à un point.

Définition 3.5. [10, Section 12.1] Un point a de $\partial\mathbb{H}^p$ est un *point limite* d'un groupe $G < Isom(\mathbb{H}^p)$ s'il existe $x \in \mathbb{H}^p$ et une suite d'éléments $g_i \in G$ tels que $g_i \cdot x$ converge vers a . L'ensemble des points limites de G est appelé *l'ensemble limite*.

Théorème 3.6. [10, Theorem 12.1.2] Si $G < Isom(\mathbb{H}^p)$, alors pour tout $x \in \mathbb{H}^p$, l'ensemble limite de G est égal à l'intersection de l'adhérence de l'orbite de $G \cdot x$ dans \mathbb{H}^p et de $\partial\mathbb{H}^p$.

Lemme 3.7. [10, Lemma 12.1.1] Soient G un sous-groupe de $Isom(\mathbb{H}^p) = Mobius(B_n)$ et K un fermé G -invariant de B^n . Alors l'enveloppe convexe de K dans $\overline{B_n}$ est un fermé G -invariant de $\overline{B^n}$.

Théorème 3.8. [10, Theorem 12.1.3] Soit G un groupe possédant une infinité de points limites. Alors tout sous-ensemble non vide, G -invariant et fermé de $\partial\mathbb{H}^p$ contient l'ensemble limite de G .

Il est souvent utile, pour étudier un groupe, d'étudier son action sur un espace métrique bien choisi. Ceci permet souvent de déduire des propriétés algébriques du groupe à partir des propriétés géométriques de l'espace en question. Pour ce faire, il est nécessaire que l'action du groupe soit en quelque sorte contrôlée. Les deux définitions suivantes fournissent des exemples de ceci qui nous seront utiles par la suite.

Définition 3.9. Soit ρ une représentation d'un groupe G vers le groupe des isométries d'un espace métrique géodésique X . L'action du groupe est dite *cocompacte* si le quotient de X par l'action du groupe est compact avec la topologie quotient. L'action est *proprement discontinue* si, pour tout compact K de X , l'ensemble $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Une action qui est à la fois cocompacte et proprement discontinue est dite *géométrique*.

Définition 3.10. Étant donnée une représentation $G \rightarrow Isom(\mathbb{H}^p)$, nous disons que l'action du groupe est *convexe-cocompacte* si l'enveloppe convexe de l'image d'un point par G est cocompacte sous l'action de G . Par les théorèmes 3.6 et 3.8 et le lemme 3.7, le fait que l'enveloppe convexe de l'image d'un point soit cocompacte sous l'action du groupe ne dépend pas du point choisi dès que l'ensemble limite de G contient une infinité de points.

Le théorème suivant nous dit que dans un espace δ -hyperbolique (au sens de Gromov), l'image par une quasi-isométrie d'une géodésique est à distance bornée d'une véritable géodésique entre ses deux extrémités.

Théorème 3.11 (Stabilité des quasi-géodésiques). [2, Part III.H, Theorem 1.7] Pour tout $\delta > 0$, $\lambda \geq 1$, $\epsilon \geq 0$, il existe une constante $R = R(\delta, \lambda, \epsilon)$ avec la propriété suivante : si X est un espace métrique géodésique δ -hyperbolique, c est une (λ, ϵ) -quasi-géodésique dans X et $[p, q]$ est une géodésique entre les extrémités de c , alors la distance de Hausdorff entre $[p, q]$ et c est bornée par R .

Dans son article, Kapovich souhaite construire pour tout groupe dans une certaine classe de groupes hyperboliques à la Gromov, une représentation proprement discontinue et convexe-cocompacte vers $Isom(\mathbb{H}^p)$. Plutôt que de construire cette représentation directement, il utilise le résultat suivant, qui était déjà connu dans la communauté.

Lemme 3.12. [9, Lemma 2.2] Soient $\rho : G \rightarrow Isom(\mathbb{H}^p)$ une représentation d'un groupe de type fini dans les isométries de l'espace hyperbolique et X un espace métrique géodésique sur lequel G agit isométriquement, cocompactement et de façon proprement discontinue. Alors l'action de G à travers ρ est proprement discontinue et convexe-cocompacte si et seulement s'il existe un plongement G -équivariant, quasi-isométrique $f : X \rightarrow \mathbb{H}^p$.

Démonstration. Si ρ est convexe-cocompacte, alors il existe un convexe G -invariant C qui est cocompact pour l'action de G . Comme l'action est proprement discontinue, le plongement de C dans \mathbb{H}^p fournit l'application recherchée. Remarquons que C est quasi-isométrique à un (tous les) graphe(s) de Cayley de G (Voir [2, Part I, Proposition 8.19]).

Dans l'autre direction, le plongement quasi-isométrique de X vers l'espace hyperbolique nous fournit un modèle de l'action de G sur \mathbb{H}^p grâce à l'équivariance. Les bonnes propriétés de l'action de G sur X peuvent donc se traduire en de bonnes propriétés de l'action de G sur \mathbb{H}^p .

Comme nous travaillons sur un espace hyperbolique au sens de Gromov, toute quasi-géodésique est à une distance bornée L de la géodésique reliant ses extrémités (voir 3.11). Remarquons que l'unicité, qui n'est pas vrai en général, découle des propriétés de \mathbb{H}^p . Ceci implique que l'image d'un convexe par un plongement quasi-isométrique est quasi-convexe. Soit S un ensemble L -quasi-convexe. Par [1, Proposition 2.5.4], il existe une constante R , ne dépendant que de L , telle que l'enveloppe convexe de S dans \mathbb{H}^p est contenu dans le R -voisinage de S . Ainsi, l'enveloppe convexe de $Im(f)$ est contenue dans le R' -voisinage de $Im(f)$ pour un certain R' . Comme l'action

de G sur X est cocompacte, l'action de G sur cette enveloppe convexe sera aussi cocompacte par équivariance. ρ est donc cocompacte.

Fixons un compact K et soit $D := \sup_{x,y \in K} d(x,y)$ son diamètre. Quitte à composer le plongement f par un élément de $Isom(\mathbb{H}^p)$, on peut supposer qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) \in K$ puisque $Isom(\mathbb{H}^p)$ est transitif sur les points de \mathbb{H}^p . Comme f est un plongement quasi-isométrique, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que si $d_X(x,y) \geq l$, alors $d(f(x), f(y)) \geq 2D$. X étant quasi-isométrique à un graphe de Cayley pour G , le nombre d'éléments $g \in G$ tels que $d(x, g \cdot x)$ soit inférieur à une constante fixée est fini. Pour $g \in G$, si $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$, alors $d(x, g \cdot x) \leq 2D$. Le nombre de tels éléments est donc fini, ce qui donne bien que l'action est proprement discontinue.

□

Remarque 3.13. Le premier exemple naturel d'un tel espace X est un graphe de Cayley de G , avec la métrique faisant de chaque arête un espace isométrique à l'intervalle $[0, 1]$.

4 Complexes polyédraux et hyperplans

Les complexes polyédraux sont des espaces topologiques constitués de polyèdres dont l'intersection deux à deux est une face commune (possiblement vide).

4.1 Complexes cubiques et complexes polygonaux pairs

Définition 4.1 (Complexes polyédraux). [2, Part I, Section 7] Soit M_κ la variété riemannienne simplement connexe, complète, à courbure constante κ . Une M_κ -cellule est définie comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans M_κ . Un M_κ -complexe polyédral est le quotient d'une union disjointe de M_κ -cellules $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ par une relation d'équivalence \sim telle que la projection $X \xrightarrow{p} K := X/\sim$ aie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la restriction de $p|_{C_\lambda}$ à une face de C_λ est injective.
2. Pour tout couple d'indices $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, et pour tout couple de points $x_1 \in C_{\lambda_1}, x_2 \in C_{\lambda_2}$, si $p(x_1) = p(x_2)$, alors il existe une isométrie $\phi : \text{supp}(x_1) \rightarrow \text{supp}(x_2)$ telle que $p(y) = p(\phi(y))$ pour tout $y \in \text{supp}(x_1)$ où $\text{supp}(x)$ dénote l'unique face contenant x en son intérieur.

Définition 4.2 (Link). Fixons un point x d'un polyèdre P . Pour y et y' deux points de P différents de x , on dit que $[x, y]$ et $[x, y']$ définissent la même *direction* en x si un segment est contenu dans l'autre. $Link(x, P)$ est alors défini comme l'ensemble des directions en x . On peut équiper cet ensemble de la métrique définissant la distance entre deux directions comme l'angle entre deux segments géodésiques dans les directions respectives, la notion d'angle étant bien définie puisque le polyèdre est vu comme sous-ensemble de M_κ pour un certain κ . Le link d'un point $z \in K$ d'un complexe polyédral est défini comme l'ensemble des directions en X , muni de la métrique associée par la projection $\coprod_{\lambda \in \Lambda} Link(x_\lambda, C_\lambda) \rightarrow Link(x, K)$ induite par $\coprod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \rightarrow K$.

Définition 4.3. Un *complexe cubique* est un complexe polyédral tel que chaque polyèdre est isométrique à I^n pour un certain n , où $I = [-1, 1]$.

Un complexe cubique est naturellement équipé d'un ensemble d'hyperplans qui traversent les cubes du complexe (voir [8]) :

Définition 4.4 (Hyperplans d'un complexe cubique). [8, Definition 2.2] Soit X un complexe cubique. Lorsqu'on se limite à un seul cube C , un *hyperplan* est la restriction d'un des paramètres à 0, par exemple $I \times I \times 0$ dans $I \times I \times I$. Ceci fournit un sous-cube de codimension 1 dans C et une application naturelle de ce sous-cube dans la division barycentrique C' de C . Soit E l'union disjointe de tous ces sous-cubes (les hyperplans) et \bar{E} le complexe obtenu en identifiant, dans le cas où un cube C est contenu dans un autre cube C' , C avec son image dans C' . Notons qu'il y a toujours une application naturelle $\bar{E} \rightarrow X'$. Un *hyperplan* de X est alors défini comme la restriction de cette application à une composante connexe de \bar{E} .

Nous rappelons ici un théorème de Gromov, qui explique en partie l'intérêt pour la notion des complexes cubiques.

Théorème 4.5 (Caractérisation des complexes cubiques localement $CAT(0)$). [2, Part II, Theorem 5.20] *Un complexe cubique de dimension finie est à courbure négative ou nulle, c'est-à-dire est localement $CAT(0)$, si et seulement si le link de chaque sommet est un complexe de drapeaux.*

Ce résultat découle en fait de ce qui est appelé la condition du link :

Définition 4.6 (Condition du link). Un complexe polyédral satisfait la *condition du link* si pour tout sommet, le link de ce sommet est un espace $CAT(1)$.

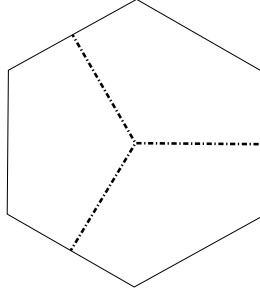


FIGURE 1 – Le trait pointillé indique un hyperplan ramifié

Théorème 4.7. [2, Part II, Theorem 5.2] Soit K un M_κ -complexe polyédral tel que le nombre de cellules à isométrie près est fini. Alors K est localement $CAT(\kappa)$ si et seulement s'il satisfait la condition du link.

Définition 4.8 (Complexe polygonal pair). [7] Un complexe polyédral de dimension 2, aussi appelé complexe polygonal, est dit *complexe polygonal pair* si chacun des polygones le constituant possède un nombre pair de côtés. Il est dit *régulier* si toutes ses faces possèdent le même nombre de côtés.

Définition 4.9 (Hyperplans ramifiés). Soit X un complexe polygonal pair. Pour tout polygone P de X nous déclarons qu'une arête sur deux est "paire", les arêtes restantes étant "impaires". Une étoile paire (respectivement impaire) est l'union des segments géodésiques reliant le centre P au centre des arêtes paires (respectivement impaires). Voir la figure 1. Soit E l'union disjointe des étoiles paires et impaires de X . Il y a une application combinatoire naturelle de E vers X' la subdivision barycentrique de X . Nous identifions deux sommets de E s'ils ont même image dans X' et cette image correspond au centre d'une arête de X . Soit \bar{E} le quotient. L'application $\bar{E} \rightarrow X'$ est toujours définie et nous définissons un *hyperplan ramifié* comme la restriction de cette application à une composante connexe de \bar{E} .

Définition 4.10. Soit H un hyperplan d'un complexe cubique ou un hyperplan ramifié d'un complexe polygonal pair. Les *arêtes duales* à H sont celles dont le milieu coïncide avec l'image d'un sommet de H . Nous notons l'ensemble des arêtes duales à H par $D(H)$. Le *voisinage combinatoire* $V(H)$ de H est l'ensemble des cellules d'intersection non vide avec l'image de H .

Définition 4.11. [8, Definition 2.3] Soit X un complexe cubique. Deux arêtes sont *parallèles* si elles sont opposées dans un carré. Une classe d'équivalence de la relation d'équivalence engendrée par le parallélisme est appelée

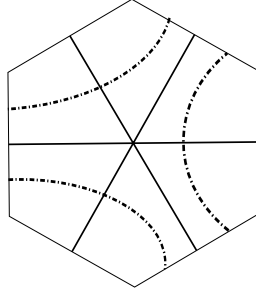


FIGURE 2 – Subdivision cubique et une classe d’hyperplans cubiques adjacents

un *mur*. Il y a une bijection entre les murs et les hyperplans d’un complexe cubique associant à un hyperplan l’ensemble des arêtes duales à cet hyperplan.

Définition 4.12. Pour X un complexe polygonal, considérons X' le complexe pour lequel à chaque face et chaque arête de X aura été ajouté un sommet en leur centre. Pour chaque arête contenue dans une face, une arête (géodésique) est aussi ajoutée reliant leurs centres respectifs. Ce nouveau complexe est appelé la *subdivision carrée* de X puisque chaque n – *gone* est divisé en n carrés et est donc un complexe cubique. Nous dirons que deux hyperplans cubiques de X' sont *adjacents* si la subdivision d’une arête de X est croisée par les deux hyperplans. On peut définir une nouvelle métrique τ sur X' : chaque carré est isométrique à un carré euclidien de longueur 1 et la distance entre deux points est défini comme la borne inférieure de la longueur des chemins les joignant.

Les hyperplans ramifiés de X peuvent être mis en relation avec les hyperplans du complexe cubique obtenu en prenant la première subdivision carrée de X comme suit.

Lemme 4.13. *Soit X un complexe polygonal pair et X' sa première subdivision carrée, équipé de la métrique de longueur τ . Si la maille du link de chaque sommet est supérieure ou égal à 4, alors X' est un complexe localement $CAT(0)$. Fixons un hyperplan H' du complexe cubique X' et soit \mathcal{H} la classe d’équivalence d’hyperplans cubiques contenant H' pour la relation d’équivalence engendré en déclarant deux hyperplans équivalents s’ils sont adjacents. Alors les arêtes duales aux hyperplans $H \in \mathcal{H}$ sont exactement les subdivisions des arêtes duales à un hyperplan ramifié de X .*

Démonstration. La première affirmation découle immédiatement de la condition du link 4.6. De par la définition des hyperplans, il est suffisant de voir que les arêtes croisées sont les mêmes, quitte à faire une subdivision des arêtes, pour un polygone possédant des arêtes duales aux deux hyperplans considérés. Ceci est clair lorsque l'on observe la subdivision carré et la définition d'adjacence, voir les figures 1 et 2.

□

4.2 Hyperplans pathologiques

Les hyperplans d'un complexe cubique et les hyperplans ramifiés d'un complexe polygonal pair peuvent présenter des pathologies indésirables. Ceci n'est par exemple pas le cas si le complexe cubique est supposé $CAT(0)$ ou si le complexe polygonal pair est simplement connexe et à maille supérieure ou égale à quatre. Dans le cas des complexes cubiques, ces pathologies sont intimement liées au concept de complexe cubique spécial introduit dans [8].

Définition 4.14 (Hyperplans pathologiques). Soit v un sommet d'un complexe cubique ou polygonal pair X et H_1 et H_2 deux hyperplans (ou hyperplans ramifiés dans le cas d'un complexe polygonal pair) avec possiblement $H_1 = H_2$. Il y a *intersection* entre ces deux hyperplans en une face F du complexe s'il existe deux arêtes consécutives dans F avec $a_1 \in D(H_1)$ et $a_2 \in D(H_2)$. Dans ce cas, le centre de la 2-cellule est dans l'image des deux hyperplans considérés. On dit que H_1 et H_2 sont *tangents* en v s'il existe deux arêtes distinctes $a_1 \in D(H_1)$ et $a_2 \in D(H_2)$ possédant v comme sommet et telle qu'il n'existe pas de 2-cellule contenant à la fois v , a_1 et a_2 .

Les trois pathologies qui nous intéresseront sont :

1. *Auto-intersection* : un hyperplan H s'autointersecte s'il existe une cellule de dimension deux F dont toutes les arêtes du bord sont duales à H . Nous disons que l'hyperplan est plongé s'il ne s'autointersecte pas.
2. *Auto-tangence* : un hyperplan H est auto-tangent si, dans la définition de tangence, on peut prendre $H = H_1 = H_2$, i.e. H est tangent à lui-même.
3. *Inter-tangence* : deux hyperplans sont inter-tangents s'ils s'intersectent et sont tangents.

4.3 Cas des complexes $CAT(0)$

Lorsque le complexe cubique est $CAT(0)$, nous pouvons déduire des propriétés très fortes par rapport aux hyperplans du complexe.

- Théorème 4.15.**
1. *Les hyperplans séparent le complexe en 2 composantes connexes ([11, Theorem 4.10]).*
 2. *Un chemin combinatoire dans le 1-squelette du complexe est une géodésique combinatoire si et seulement si la suite des hyperplans qu'il traverse est sans répétition ([11, Theorem 4.13]).*
 3. *Les hyperplans ne présentent aucune des 3 pathologies présentées ci-dessus (voir [8, Example 3.3]).*

Dans le cas des complexes polygonaux pairs, nous avons le résultat suivant, qui découle immédiatement de la preuve de [9, Lemma 2.6] :

Lemme 4.16. *Soit X un complexe polygonal pair $CAT(0)$ tel que la maille de chaque link soit minorée par 4. Alors les hyperplans ramifiés sont plongés et convexes pour la métrique τ de 4.13.*

Démonstration. Fixons un hyperplan ramifié R . Par le choix de la métrique τ , lorsque l'on se restreint à un polygone, l'application naturelle $R \rightarrow X$ est une isométrie locale au centre car l'angle entre deux segments R est $\geq \pi$. Toujours grâce au choix de la métrique, c'est aussi une isométrie locale au milieu d'une arête appartenant à l'intersection de deux faces du voisinage combinatoire de R . Donc, par passage du locale au global, l'application $R \rightarrow X$ est une isométrie globale. Les hyperplans ramifiés sont donc plongés et convexes. \square

De ceci découle le corollaire suivant, dont la preuve calque celle du résultat analogue pour les complexes cubiques $CAT(0)$, voir [8, Example 3.3].

Corollaire 4.17. *Les hyperplans ramifiés d'une complexe polygonal $CAT(0)$ dont la maille du link de chaque sommet est minorée par 4 ne sont pas auto-tangents et aucune paire d'hyperplans ne s'autointersecte.*

Démonstration. Considérons deux arêtes a et b partageant un sommet mais pas contenues dans une même face. Le segment joignant le milieu de ces deux arêtes et contenu dans $a \cup b$ est une géodésique locale pour la métrique

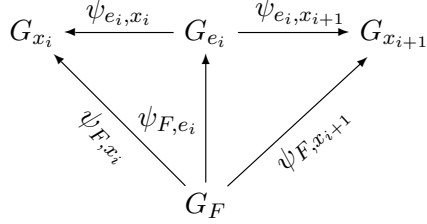
τ . Cette géodésique locale sera une géodésique par la condition $CAT(0)$. Deux arêtes correspondant à l'auto-tangence d'un hyperplan fournirait 2 géodésiques entre le centre de ces arêtes : la géodésique locale et la géodésique qui suit l'hyperplan ramifié. Ceci contredit l'unicité des géodésiques dans un espace $CAT(0)$ et nous permet de conclure que les hyperplans ne sont pas auto-tangents. Une inter-tangence nous fournirait un triangle géodésique, formé des segments d'hyperplan entre l'intersection et la tangence et des segments d'arête duales là où a lieu la tangence, avec tous ses angles mesurant $\pi/2$. Ceci est impossible dans un espace $CAT(0)$ (voir 2.14). \square

5 Polygones de groupes

5.1 Définitions

Dans cette section, nous introduisons le concept de polygone de groupes, qui est l'objet principal de l'article de Kapovich. Pour un contexte plus large, nous renvoyons le lecteur à [2, Part II, Section 12], où le concept plus général de complexe de groupes est traité. En particulier les objets qui nous intéressent dans ce mémoire y sont référés comme complexes simples de groupes. Lorsque possible, nous suivons la notation de [9], qui se restreint au cas qui nous intéresse.

Soit donc F un n -gone ($n \geq 5$) avec ses arêtes e_i entre ses sommets x_j et x_{j+1} , où l'indice $1 \leq i, j \leq n$ est pris modulo n . L'ensemble des facettes de F peut être vu comme un ensemble (partiellement) ordonné, où $\tau \leq \sigma$ si $\sigma \subset \tau$. Voyant cet ensemble ordonné comme une catégorie $Pos(F)$, un *polygone de groupes* \mathcal{P} n'est autre qu'un foncteur covariant de la catégorie $Pos(F)$ vers la catégorie des groupes et des monomorphismes. En d'autres mots, un polygone de groupes est la donnée d'un polygone F avec des groupes G_F, G_{e_i} et G_{x_i} , dits groupes locaux, attachés aux facettes de F et des monomorphismes $G_F \rightarrow G_{e_i} \rightarrow G_{x_i}$ de façon à ce que le diagramme suivant commute.



La limite inductive $\varinjlim_{\sigma \in Pos(F)} G_\sigma$ des groupes est appelée le *groupe fondamental* $G = \pi_1(\mathcal{P})$ du polygone de groupes \mathcal{P} . Autrement dit, si l'on a la présentation $\langle S_\sigma | R_\sigma \rangle$ pour le groupe associé à une facette σ , et des monomorphismes $\psi_{\tau\sigma}$ entre deux groupes, une présentation pour G est donnée par $\langle \coprod S_\sigma | \coprod R_\sigma, \psi_{\tau\sigma}(a) = a \rangle$.

Un morphisme d'un polygone de groupe \mathcal{P} vers un groupe H est la donnée, pour toute facette $\sigma \in P$ d'un morphisme $\phi_\sigma : G_\sigma \rightarrow H$ de façon à ce que si $\tau \leq \sigma$, $\phi_\sigma \circ \psi_{\tau\sigma} = \phi_\tau$

Définition 5.1. Soit H un groupe agissant sur un complexe polygonal en envoyant bijectivement chaque k -cellule sur une autre k -cellule. Un *domaine fondamental strict* pour cette action est un sous-complexe Y contenant exactement un point de chaque orbite.

Il existe une façon naturelle de construire un polygone de groupes en attachant, dans un domaine fondamental, le stabilisateur d'une face à la face en question. Ceci permet de bien visualiser le polygone de groupes, et donne lieu au concept de développabilité.

Supposons donc qu'un groupe H agisse sur un complexe polygonal en envoyant bijectivement chaque k -cellule sur une autre k -cellule et avec un polygone F comme domaine fondamental strict. Considérons l'ensemble ordonné $Pos(F)$. Alors le foncteur \mathcal{P} envoyant chaque $\sigma \in Pos(F)$ sur le stabilisateur G_σ de la facette σ et chaque relation entre deux facettes $\sigma \leq \tau$ sur l'inclusion naturelle du stabilisateur $G_\sigma \hookrightarrow G_\tau$ est un polygone de groupes. L'inclusion naturelle $\phi_\sigma : G_\sigma \rightarrow G$ définit un morphisme de polygone de groupes $\mathcal{P} \rightarrow H$ qui est injectif aux groupes locaux. Un polygone de groupes provenant d'une telle construction est dit *développable*.

Théorème 5.2. [2, Part II, Theorem 12.18] Un polygone de groupes \mathcal{P} est développable si et seulement si les groupes G_F , G_{e_i} et G_{x_i} se plongent natu-

rellement dans $G = \pi_1(\mathcal{P})$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de polygone de groupes $\phi : \mathcal{P} \rightarrow G$ qui soit injectif aux groupes locaux G_σ .

5.2 Courbure et angles

Pour tout $x_i \in P$, nous pouvons définir un graphe Lk_{x_i} , qui correspondrait au link du sommet dans un développement du polygone de groupes, si ce dernier existait. Les sommets sont en correspondance biunivoque avec les classes latérales G_{x_i}/G_{e_i} et $G_{x_i}/G_{e_{i-1}}$. Deux sommets gG_{e_i} et $g'G_{e_{i-1}}$ sont joints par une arête s'il existe k tel que $kG_F \subset gG_{e_i}$ et $kG_F \subset g'G_{e_{i-1}}$. En assignant la même longueur à toutes les arêtes, le groupe G agit sur ce graphe de façon isométrique. Suivant Gersten-Stallings, nous définissons alors l'angle entre G_{e_i} et $G_{e_{i-1}}$ comme $2\pi/\text{maille}(Lk_{x_i})$ (voir [12]). Un polygone de groupes est dit *aigu* ou encore à *angles aigus* si l'angle entre 2 arêtes consécutives est $\leq \frac{\pi}{2}$.

Définition 5.3. [6, Definition 6.3] Un polygone de groupe \mathcal{P} est à *courbure négative ou nulle* (respectivement *courbure strictement négative*) si la métrique sur la face F est à courbure négative ou nulle (respectivement strictement négative) et si pour chaque sommet Lk_{x_i} est un espace $CAT(1)$. La dernière condition est équivalente à demander que, avec la métrique induite sur le link (voir 4.2), la systole du graphe soit supérieure à 2π .

Comme par la suite nous travaillerons souvent avec des polygones dont tous les angles sont droits, la condition sur la systole signifie que la maille doit être supérieure ou égal à quatre. Puisque le link du sommet d'un polygone de groupes est biparti, il est intéressant de pouvoir dire quand est-ce que la maille vaudra exactement deux.

Lemme 5.4. [2, Part II, 12.29] *En un sommet x_i d'un polygone de groupes \mathcal{P} , la maille de Lk_{x_i} est 2 si et seulement si $G_F \neq G_{e_i} \cap G_{e_{i-1}}$.*

Démonstration. La maille vaut deux si et seulement si on peut trouver deux classes latérales différentes gF et $g'F$ joignant les arêtes correspondant à deux classes latérales G_{e_i} et $G_{e_{i-1}}$. $g'g^{-1} \subsetneq G_F$ puisque gF et $g'F$ sont différentes. Nous avons donc bien trouver un élément appartenant à $G_{e_i} \cap G_{e_{i-1}}$ mais pas à G_F .

$G_F \subsetneq G_{e_i} \cap G_{e_{i-1}}$ si et seulement s'il existe un élément $g \notin G_F$ appartenant à la fois à G_{e_i} et à $G_{e_{i-1}}$. La classe latérale de G_{x_i}/G_F contenant

cet élément fournira une arête, différente de celle correspondant à l'identité de G_{x_i}/G_F puisque $g \notin G_F$, entre les sommets correspondant à G_{e_i} et $G_{e_{i-1}}$. \square

Corollaire 5.5. *Soit \mathcal{P} un polygone de groupes. Supposons que la métrique sur la face F du polygone est telle que tous les angles sont droits. La condition de 5.3 sur la systole sera satisfaite si et seulement si $G_F = G_{e_i} \cap G_{e_{i-1}}$ pour toutes les paires d'arêtes adjacentes.*

Le théorème suivant est un autre exemple de passage du local au global : la condition de courbure négative ou nulle, qui est de nature locale, permet d'assurer que les recollements des développements locaux pourra se faire et fournir un développement global du polygone de groupes.

Théorème 5.6 (Part II Theorem 12.28). *Soit \mathcal{P} un polygone de groupes dont la face F est équipé d'une métrique à courbure négative ou nulle. Supposons de plus que le polygone de groupes est à courbure négative. Alors \mathcal{P} est développable.*

Remarque 5.7. Il est possible de reformuler les concepts de courbure négative et de développabilité dans le contexte qui nous intéresse de la façon suivante (voir [9]) : il existe un complexe polygonal régulier simplement connexe X (le revêtement universel de \mathcal{P}) et une métrique dont la restriction à chaque face de X est à courbure constante -1 tels que :

1. Chaque face est isométrique à un n -gone de \mathbb{H}^2 avec angles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
2. Chaque cellule est convexe.
3. Il existe une action isométrique et cellulaire $G \curvearrowright X$ qui est transitive sur les 2 cellules.
4. Pour toute face F de X , le stabilisateur de F est isomorphe à G_F et fixe F point par point.
5. Pour toute arête e de X , le stabilisateur de e est isomorphe à G_e et fixe e point par point.
6. Pour tout sommet x de X , le stabilisateur de x est isomorphe à G_x .
7. Les inclusions des stabilisateurs coïncident avec les monomorphismes de la définitions du polygone de groupes.

Nous rappelons que dès que le nombre de côté du polygone est strictement supérieur à 4, il existe un polygone régulier à angles droits dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 (voir par exemple [10, Section 7]). En prenant comme modèle

F le polygone régulier à angles droits de \mathbb{H}^2 , et supposant que le polygone de groupes étudié \mathcal{P} est aigu, nous y associons un complexe polygonal $CAT(-1)$ avec chaque face isométrique au polygone régulier à angles droits de \mathbb{H}^2 et satisfaisant les conditions (2)-(7) ci-dessus.

6 Plongement quasi-isométrique de complexes polygonaux dans \mathbb{H}^p

Cette section présente le résultat de Kapovich concernant le plongement quasi-isométrique de certains complexes polygonaux.

Soit F un n -gone hyperbolique régulier à angles droits. Kapovich note a_n la longueur d'un côté, ρ_n le rayon du cercle circonscrit, r_n le rayon du cercle inscrit et b_n la longueur de la plus petite diagonale de F (qui sépare donc F en un triangle et un $(n-1)$ -gone. Nous remarquons que ces fonctions de n sont croissantes. Soit $Bis(E)$ l'hyperplan médiateur d'un segment $E \subset \mathbb{H}^p$, c'est-à-dire l'hyperplan perpendiculaire au segment en son milieu. Voici maintenant trois lemmes, qui seront utilisés par Kapovich pour démontrer le théorème principal de cette section, théorème 6.5. Ils utilisent l'observation suivante, que Kapovich appelle le "test des hyperplans médiateurs disjoints".

Observation 6.1. Soient $E = \overline{xx'}$, $E' = \overline{x'x''}$ deux segments de \mathbb{H}^p s'intersectant perpendiculairement en x' . Alors les hyperplans médiateurs en leur milieux sont disjoints si et seulement si $\sinh(\frac{|E|}{2}) \sinh(\frac{|E'|}{2}) \geq 1$. Notons de plus que comme \sinh est croissante, si pour deux longueurs de segment les hyperplans médiateurs sont disjoints, cela sera toujours vrai pour les hyperplans médiateurs de segments de longueur supérieure ou égale.

Lemme 6.2. Soient $E, E' \subset \mathbb{H}^2$ deux segments orthogonaux tels que $|E| = 2\rho_n$ et $|E'| = a_n$. Alors $\emptyset = \overline{Bis(E)} \cap \overline{Bis(E')} \subset \mathbb{H}^2$ si $n \geq 7$ et $\overline{Bis(E)} \cap \overline{Bis(E')}$ est un point à l'infini si $n = 6$.

Lemme 6.3. Dans la situation du lemme précédent, mais avec $|E| = b_n$, $|E'| = a_n$ et $n \geq 7$, $\emptyset = \overline{Bis(E)} \cap \overline{Bis(E')} \subset \mathbb{H}^2$.

Démonstration. Les deux lemmes découlent de calculs puisque nous pouvons trouver des expressions analytiques pour les quantités a_n , b_n , r_n et ρ_n . Par exemple, $\cosh(a_n) = 1 + 2 \cos(\frac{2\pi}{n})$ et $\cosh(b_n) = \cosh^2 a_n$. Il s'agit alors d'un calcul pour montrer que la condition du test des hyperplans médiateurs

disjoints est satisfaite dans le cas du lemme 6.3. La preuve du lemme 6.2 est similaire. \square

Lemme 6.4. *Soient s , s' et s'' 3 segments mutuellement orthogonaux de \mathbb{H}^3 tels que $s \cap s' = p$, $s' \cap s'' = q$, $|s| = |s''|$ et $s' = \overline{pq}$. Si $|s| = b_n$ et $|s'| = a_n$, $n \geq 5$, alors $\emptyset = \overline{Bis}(s) \cap \overline{Bis}(s'')$.*

Nous sommes maintenant prêts à énoncer le théorème de Kapovich concernant les plongements quasi-isométriques dans \mathbb{H}^p .

Théorème 6.5. [9, Théorème 4.1] *Soit X un complexe polygonal régulier simplement connexe tel que*

1. *chaque face est isométrique à un polygone régulier à angle droits de \mathbb{H}^2 ;*
2. *le complexe est à courbure négative, ce qui, par la condition du link (voir 4.6) est équivalent à demander que la systole de chaque link soit supérieure à 2π .*

Soit $\mu : X \rightarrow \mathbb{H}^p$ une application continue qui se restreint en une isométrie totalement géodésique sur chaque face de X . Supposons que pour toutes faces F' et F'' intersectant non trivialement une face F , $\text{Span}_{\mathbb{H}^p}(\mu(F')) \perp \text{Span}_{\mathbb{H}^p}(\mu(F''))$. Alors μ est un plongement quasi-isométrique.

Démonstration. Comme X est quasi-isométrique à son 1-squelette $X^{(1)}$, il est suffisant de démontrer que $\mu|_{X^{(1)}}$ est un plongement quasi-isométrique. Comme μ est un plongement isométrique sur chaque face, il est suffisant de se restreindre aux sommets de X . De plus, pour tout couple $x, y \in X^{(0)}$, $d_{\mathbb{H}^p}(\mu(x), \mu(y)) \leq d_X(x, y)$. Il est donc suffisant de démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout couple $x, y \in X^{(0)}$, $C \cdot d_X(x, y) \leq d_{\mathbb{H}^p}(\mu(x), \mu(y))$. Soit donc γ une géodésique de $X^{(1)}$ reliant x à y .

L'idée de la preuve est la suivante. Le fait que l'application est isométrique sur chaque face, et que l'interaction entre trois faces consécutives est régit par la condition d'orthogonalité fournit un contrôle local de l'image de la géodésique. Ceci permet de trouver une suite d'hyperplans de \mathbb{H}^p traversé par $\mu(\gamma)$ tel que la distance entre deux hyperplans consécutifs est minorée uniformément. Ceci permet de conclure que l'image de la géodésique est une quasi-géodésique.

Kapovich remplace tout segment de γ contenant exactement la moitié du périmètre d'une face (en particulier le polygone doit être un $2m$ -gone) par

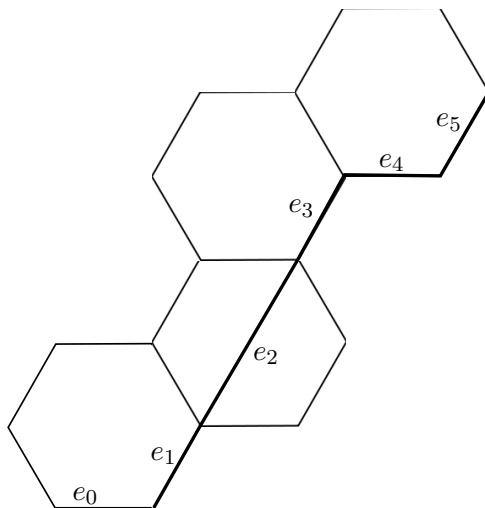


FIGURE 3 – Illustration d’un segment γ' . Dans ce cas, $E_1 = e_2$, $E_2 = e_3$ et $E_3 = e_5$.

une *diagonale* antipodale et note γ' ce nouveau chemin dans X . Il est suffisant de minorer la longueur de $f(\gamma')$. Il considère alors les sous-segments suivants de γ' , où $\gamma' = e_0, e_1, \dots, e_l$ est la suite des arêtes et diagonales antipodales formant γ' (voir aussi la figure 3) :

1. $E_0 = e_0$
2. Si $E_i = e_j$ a été choisi, alors E_{i+1} est le premier e_k , $k > j$ tel que :
 - (a) E_i et e_k n’appartiennent pas à un même polygone.
 - (b) Si $E_i \cap e_k \neq \emptyset$, alors un des deux segments est une diagonale joignant deux points antipodaux.

Nous voudrions maintenant démontrer que les hyperplans médiateurs dans \mathbb{H}^p de l’image de deux segments E_i et E_{i+1} sont disjoints. Ceci permettrait à Kapovich de conclure de la façon suivante. Premièrement, il note qu’il n’y a qu’un nombre fini de configuration possible de positionnement entre E_i consécutifs puisque par hypothèse, l’image de 3 polygones consécutifs, qui contiendra nécessairement deux segments E_i consécutifs, satisfait une condition de perpendicularité. Ceci signifie qu’il existe δ , ne dépendant que de X , tel que la distance entre deux hyperplans médiateurs consécutifs dans \mathbb{H}^p est minorée par δ . La distance, dans X , entre deux E_i consécutifs est bornée par une constante c par construction. Ainsi, l’image de la géodésique γ doit croiser au moins $\text{longueur}(\gamma)/c$ hyperplans, qui sont à une distance

au moins δ l'un de l'autre. Ainsi, $d_{\mathbb{H}^p}(\mu(x), \mu(y)) \geq \frac{\delta}{c} d_X(x, y)$, ce qui fournit la minoration recherchée.

La vérification que 2 hyperplans consécutifs $Bis(\mu(E_i))$ et $Bis(\mu(E_{i+1}))$ sont disjoints se divise en plusieurs cas, qui font appel aux lemmes 6.2, 6.3 et 6.4.

Kapovich analyse d'abord le cas où au moins 1 des segments, disons E_i est une diagonale. Alors la longueur des segments, que l'on peut mesurer dans X ou dans \mathbb{H}^p puisque le plongement est isométrique sur les faces, est $2\rho_n$ dans le cas de la diagonale et est minorée par a_n pour l'autre segment. Donc par 6.2, les hyperplans médiateurs sont disjoints puisque les deux segments partagent un sommet et sont donc perpendiculaires par hypothèse.

Kapovich peut maintenant supposer que ni l'un ni l'autre des segments est une diagonale. Nous considérons 2 cas :

1. Il existe une face F contenant E_i ou E_{i+1} et une arête de γ entre E_i et E_{i+1} . Supposons sans perte de généralité que $E_i \subset F$. Par construction, E_{i+1} partage un sommet x' avec F (et est donc perpendiculaire à E_i par hypothèse). Il existe un sommet y tel que la $Bis(\overline{yx'}) = Bis(E_i)$. En effet, on pourra simplement prendre la réflexion échangeant les sommets de E_i pour trouver y . Remarquons que $\overline{yx'}$ n'est pas une arête de F car sinon E_i serait une diagonale. Ainsi, la longueur de $\overline{yx'}$ est supérieur à b_n et on peut donc conclure par le lemme 6.3. Voir figure 4.
2. Le dernier cas à considérer est lorsque E_i et E_{i+1} sont séparé par un unique segment e , qui sera nécessairement une arête par choix de E_{i+1} . Comme au point précédent, on peut trouver un segment ayant le même hyperplan médiateur que E_i (respectivement E_{i+1} et de longueur $\geq b_n$, ce qui permet d'appliquer le lemme 6.4.

□

Remarque 6.6. Dans l'article [9], Kapovich traite aussi les cas $n = 5, 6$, qui sont plus délicats.

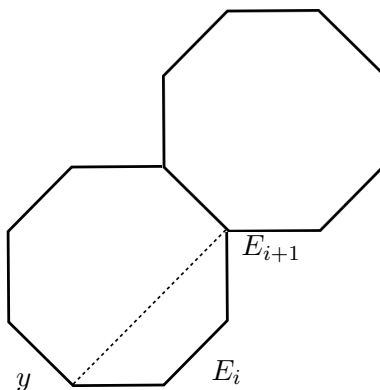


FIGURE 4 – Illustration du segment ayant le même hyperplan médiateur que E_i dans le cas 1.

7 Construction

7.1 Action de Γ'

Le but de cette section est de présenter la généralisation de la méthode l'article de Kapovich à une action sur un complexe polygonal qui ne provient pas nécessairement d'un polygone de groupes.

Soit X un complexe polygonal pair $CAT(0)$ dont la maille de chaque link est au moins quatre et donc chaque face possède le même nombre de côtés $n = 2m \geq 8$. Soit Γ un groupe agissant géométriquement sur X . De façon analogue à la définition de complexe cubique spécial de [8], nous demandons que la condition suivante soit remplie :

Il existe un sous-groupe distingué, sans torsion et d'indice fini Γ' de Γ tel que les hyperplans ramifiés du quotient $\Gamma' \backslash X$ soient plongés, sans inter-tangence et sans auto-intersection.

Remarquons immédiatement que, alors que l'hypothèse sur l'absence d'inter-tangence simplifie la preuve ci-dessous, elle n'est pas nécessairement satisfaite dans le complexe considéré par Kapovich. Nous expliquerons dans la section 9 comment on peut faire fonctionner la machinerie présentée ci-dessous dans le complexe considéré par Kapovich.

Remarque 7.1. Vu l'hypothèse sur la maille, exiger que chaque n -gone soit isométrique à l'unique n -gone à angle droit dans \mathbb{H}^2 entraîne le fait que X

soit $CAT(-1)$.

L'idée est de construire, à partir de l'action de Γ' sur X , une action de Γ sur le complexe de Davis d'un certain groupe de Coxeter associé à Γ' . La première étape est de plonger le complexe X dans le complexe de Davis et de définir une action de Γ' sur l'image de X .

Considérons donc le graphe pondéré fini G dont les sommets sont en bijection avec l'ensemble S des hyperplans ramifiés de $\Gamma' \backslash X$. Entre deux sommets, il y a une arête de poids m si les hyperplans correspondants s'intersectent et de poids ∞ s'ils sont disjoints. Cette construction est bien définie puisque tous les polygones possèdent le même nombre de côtés n . Le groupe de Coxeter associé (W, S) agit sur un complexe simplicial $\Sigma(W, S)$, appelé complexe de Davis, possédant de nombreuses propriétés désirables. Entre autres, l'action est propre, cocompacte, et le complexe est $CAT(0)$. La combinatoire du graphe G , la classification des groupes de Coxeter sphériques ainsi que la définition de $\Sigma(W, S)$ impliquent que $\Sigma(W, S)$ est de dimension 2. Voir [3]. Pour le reste de cette section, nous notons s_R le générateur de W associé à un hyperplan ramifié R et $R(e)$ l'hyperplan ramifié traversant une arête e .

Nous considérons l'application φ qui à tout chemin d'arêtes dans le 1-squelette de X fait correspondre le mot composé de la suite de générateurs de W correspondant aux hyperplans ramifiés traversés. Plus précisément, à un chemin $e_1 \dots e_k$, nous associons le mot $s_{R_{e_k}} \dots s_{R_{e_1}}$.

Nous faisons agir Γ' sur $\Sigma(W, S)$ de la façon suivante. Puisqu'il s'agit du groupe fondamental de $\Gamma' \backslash X$, tout élément de Γ' peut être représenté par un lacet dans le 1-squelette du complexe polygonal $\Gamma' \backslash X$ (voir [4, Chapter 3]). Nous pouvons appliquer φ à ce lacet pour obtenir un mot de W , qui agit par multiplication sur $\Sigma(W, S)$.

Lemme 7.2. *L'application $\varphi : \Gamma' \rightarrow \text{Aut}(\Sigma(W, S))$ est bien définie et est un morphisme de groupe.*

Démonstration. Nous devons démontrer que si deux boucles sont homotopes dans le $\Gamma' \backslash X$, alors elles définissent le même élément de W . Puisque deux boucles sont homotopes si et seulement si elles diffèrent par une suite d'homotopies élémentaires, il est suffisant de supposer que nos deux boucles diffèrent par une homotopie élémentaire. Une homotopie élémentaire de type I (i.e. remplacer un segment du bord d'un polygone de périmètre m par son complémentaire dans le bord) correspond à remplacer une suite dans $(s_{R_i} s_{R_j})^m$

par son complémentaire et ne change donc pas l'élément de W défini par φ . Une homotopie élémentaire de type II est encore plus transparente : il s'agit de traverser une arête deux fois successivement, ce qui correspond à la relation $s_{R_i}^2$ et ne change donc pas l'élément de W défini par φ . Nous concluons que φ est bien définie. \square

Fixons deux points base $x_0 \in X$ et $o \in \Sigma(W, S)$. Nous pensons à o comme à l'identité du groupe (rappelons que le 1-squelette de $\Sigma(W, S)$ est un graphe de Cayley pour W). Soient $x \in X^{(0)}$ et c un chemin dans $X^{(1)}$ d'extrémités x_0 et x . Notons c' la projection du chemin c au complexe $\Gamma' \setminus X$.

$$\begin{aligned} \eta : X^{(0)} &\rightarrow \Sigma(W, S) \\ x_0 &\mapsto o \\ x &\mapsto \varphi(c')(o) \end{aligned}$$

La preuve de 7.2 nous assure que $\varphi(c')$ ne dépend que de x et pas du chemin choisi. Cette application s'étend sans problème au 1-squelette, puis au 2-squelette puisque deux hyperplans ramifié se croisant fournissent une relation de type $(s_i s_j)^m$, et donc une 2-cellule dans $\Sigma(W, S)$.

Le fait que les hyperplans ramifiés soient plongés et ne possèdent pas de point d'auto-tangence nous permet de dire que $Link(x, X)$ est plongé dans $Link(\eta(x), \Sigma(W, S))$ pour chaque sommet $x \in X$. L'hypothèse voulant qu'il n'y ait pas d'inter-tangence nous permet d'affirmer que cette application est *pleine* : un sous-complexe dont toutes les arêtes sont contenues dans l'image est en fait contenu dans l'image. Ainsi, la borne sur la maille du link dans X est toujours valide lorsque $\Gamma' \setminus X$ est immergé dans $\Sigma(W, S)$. De plus, nous pouvons conclure que cette application est une isométrie locale. Donc, par [2, Chapter II, Proposition 4.14], l'application η est un plongement isométrique de X dans $\Sigma(W, S)$.

Nous souhaitons maintenant construire un plongement quasi-isométrique $\eta(X) \rightarrow \mathbb{H}^p$. Pour ce faire, nous transitons à travers un groupe de Coxeter pour lequel il est facile de construire une action sur \mathbb{H}^p : le groupe W_m décrit ci-dessous.

Soient $q \in \mathbb{H}^p$ et O un repère orthonormé (en bijection avec les hyperplans ramifiés) dans l'espace tangent en q de \mathbb{H}^p . Soit $2a$ la longueur d'une arête d'un polygone régulier à angle droit à n côtés. Pour chaque vecteur v_R

de O , $R \in S$, on considère le transport parallèle à partir de q dans la direction de v_R pour une distance de $2a$. On définit alors $\rho(s_{R_i})$ comme la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur de ce segment. Par construction, nous avons que pour tout $s_{R_i} \neq s_{R_j}$, $\text{ordre}(\rho(s_{R_i})\rho(s_{R_j}))=m$. Par le théorème de Poincaré (voir [10, Theorem 13.5.3 et Theorem 13.5.4]), le groupe W_m engendré par ces réflexions est un groupe de Coxeter dont le graphe associé est un graphe complet sur p sommets dont toutes les arêtes ont poids m . Il y a une application quotient $W \rightarrow W_m$.

De plus, le polyèdre convexe dont les hyperplans sont les faces est un domaine fondamental strict pour l'action du groupe. Duale à ceci, on peut prendre l'image de l'origine par W_m et retrouver le 0-squelette de $\Sigma(W_m, S)$. En ajoutant pour chaque pair de sommets séparés par un seul hyperplan la géodésique joignant ces sommets, on retrouve le 1-squelette de $\Sigma(W_m, S)$. On pourra ensuite ajouter les polygones nécessaires dans \mathbb{H}^p correspondant aux 2-cellules de $\Sigma(W_m, S)$, et on en déduit une application $\theta : \Sigma(W_m, S) \rightarrow \mathbb{H}^p$.

Proposition 7.3. $\theta : \Sigma(W_m, S) \rightarrow \mathbb{H}^p$ est un plongement quasi-isométrique.

Démonstration. Nous souhaiterions utiliser le théorème 6.5 afin de déduire que θ est un plongement quasi-isométrique. Cependant, ce ne sont pas toutes les hypothèses qui sont satisfaites : les polygones sont réguliers à angles droits, mais la maille vaut 3 en tout sommet. De plus, l'hypothèse d'orthogonalité est presque toujours satisfaite, sauf dans le cas où F' et F'' correspondent aux mêmes générateurs. Cependant, les propriétés du complexe $\Sigma(W_m, S)$ nous assurent que, dans la preuve de 6.5, le cas (2) traité à la toute fin de la preuve ne se présente pas. En effet, dans $\Sigma(W_m, S)$, deux arêtes consécutives sont toujours contenues dans une même face. Ce sous-cas éliminé, l'argument de la preuve est valide pour démontrer que θ est bien un plongement-quasi-isométrique. \square

Il suffit maintenant de voir que la composition $X \rightarrow \Sigma(W, S) \rightarrow \Sigma(W_m, S)$ est un plongement quasi-isométrique afin de conclure que nous avons trouvé un plongement quasi-isométrique Γ' -équivariant $X \rightarrow \mathbb{H}^p$. Ce travail étant de nature plus technique, il est abordé dans la section 9.

Remarque 7.4. Remarquons que le complexe construit dans \mathbb{H}^p correspond à l'action d'un groupe de Coxeter ayant les mêmes générateurs mais dont toutes les arêtes du graphe associé ont un poids de m . Le morphisme de $W \rightarrow$

$Isom(\mathbb{H}^p)$ est tout de même défini, car les relations de W sont respectées. Cependant, il serait agréable de trouver une représentation de W dont la géométrie reflète plus fidèlement celle du groupe.

7.2 De Γ' à Γ

Dans la section précédente, nous avons construit une représentation $\Gamma' \rightarrow Isom(\mathbb{H}^p)$. Cependant, pour atteindre notre but de factoriser la construction de Kapovich, il reste encore à étendre cette représentation au groupe Γ tout entier. C'est l'objectif de cette section.

Une façon naturelle d'étendre l'action de Γ' au groupe tout entier est de définir un morphisme $\Gamma \rightarrow Aut(\Sigma(W, S))$. Comme les éléments de Γ' agissent déjà par automorphisme sur le complexe de Davis, il suffit de définir adéquatement une action des éléments de $F := \Gamma/\Gamma'$ et de s'assurer que la composition est bien un morphisme. F agit par permutation sur les hyperplans branchés de X/Γ' et donc aussi sur les générateurs de W . Cette action respecte les relations de la présentation de (W, S) puisque F préserve l'intersection des hyperplans. Autrement dit, nous avons un morphisme $\psi : F \rightarrow Aut(W, S)$. Par abus de notation, nous noterons également ψ la composition avec l'application quotient $\Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma'$. Ceci nous permet d'étendre de façon univoque l'application ψ à tout le groupe Γ . Comme il est clair que les automorphismes de (W, S) fournissent aussi des automorphismes de $\Sigma(W, S)$, il nous suffit maintenant de vérifier que l'on peut amalgamer ces automorphismes à ceux provenant de Γ' pour obtenir un morphisme $\Gamma \rightarrow Aut(\Sigma(W, S))$.

Pour deux points $x, y \in X$, nous pouvons considérer la W -distance entre ces deux points : le mot de W formé par la suite de projection aux hyperplans ramifiés de X/Γ' des hyperplans ramifiés traversés par un chemin de x à y dans le 1-squelette de X . X étant simplement connexe, la preuve de 7.2 nous indique que le mot de W ainsi défini ne dépend pas du chemin choisi mais seulement des extrémités. Ce mot sera dénoté par $W(x, y)$.

Rappelons que l'on a fixé un point $x_0 \in X$ qui correspond à l'origine de $\Sigma(W, S)$. Un élément γ' de Γ' correspond à un lacet qui croise des hyperplans R_1, \dots, R_k et γ' agit par multiplication par $s_{R_k} \dots s_{R_1}$ sur $\Sigma(W, S)$. Ceci est équivalent à regarder la projection des hyperplans ramifiés traversés par une géodésique reliant x_0 à $\gamma' \cdot x_0$. Nous notons par $c(\gamma')$ cet automorphisme, qui n'est autre que la multiplication par $W(x_0, \gamma' \cdot x_0)$. Comme l'action de W sur son complexe de Davis préserve le type des arêtes, c'est-à-dire l'étiquette du

générateur associé, $c(\gamma')$ préserve aussi le type. La définition de c s'étend sans problèmes à tout Γ en définissant $c(\gamma) :=$ multiplication par $W(x_0, \gamma \cdot x_0)$. Pour un élément $\gamma \in \Gamma$ (donc pas nécessairement dans Γ'), le type n'est pas nécessairement préservé. Nous avons cependant la relation suivante :

$$W(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = \psi(\gamma)(W(x, y)) \quad (1)$$

Nous définissons une application Ψ

$$\begin{aligned} \Psi : \Gamma &\rightarrow \text{Aut}(\Sigma(W, S)) \\ \gamma &\rightarrow c(\gamma) \circ \psi(\gamma) \end{aligned}$$

Soit γ_1 et γ_2 deux éléments de Γ . Nous devons vérifier que $\Psi(\gamma_1\gamma_2) = \Psi(\gamma_1)\Psi(\gamma_2)$.

$$\Psi(\gamma_1\gamma_2) = c(\gamma_1\gamma_2)\psi(\gamma_1\gamma_2) \quad (2)$$

$$= W(x_0, \gamma_1\gamma_2 \cdot x_0)\psi(\gamma_1)\psi(\gamma_2) \quad (3)$$

$$= W(x_0, \gamma_1 \cdot x_0)W(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_1\gamma_2 \cdot x_0)\psi(\gamma_1)\psi(\gamma_2) \quad (4)$$

$$= c(\gamma_1)\psi(\gamma_1)(c(\gamma_2))\psi(\gamma_1)\psi(\gamma_2) \quad (5)$$

$$= c(\gamma_1)\psi(\gamma_1)c(\gamma_2)\psi^{-1}(\gamma_1)\psi(\gamma_1)\psi(\gamma_2) \quad (6)$$

$$= c(\gamma_1)\psi(\gamma_1)c(\gamma_2)\psi(\gamma_2) \quad (7)$$

$$= \Psi(\gamma_1)\Psi(\gamma_2) \quad (8)$$

Le passage de 3 à 4 est justifié par le fait que pour obtenir un chemin de x_0 à $\gamma_1\gamma_2 \cdot x_0$, on peut d'abord prendre un chemin de x_0 à $\gamma_1 \cdot x_0$, suivi d'un chemin de $\gamma_1 \cdot x_0$ à $\gamma_1\gamma_2 \cdot x_0$. Le passage de 4 à 5 découle immédiatement de la relation 1. Comme $\psi(\gamma_1)$ est un automorphisme de $\Sigma(W, S)$, on a que $\psi(\gamma_1)^{-1}c(\gamma_2)\psi(\gamma_1) = \psi(\gamma_1)(c(\gamma_2))$. Ceci complète la preuve que Ψ est bien un homomorphisme.

En admettant les résultats de la section 9, nous avons obtenu un plongement quasi-isométrique $X \rightarrow \Sigma(W, S) \rightarrow \Sigma(W_m, S) \rightarrow \mathbb{H}^p$ qui est Γ -équivariant. On peut donc invoquer le lemme 3.12 afin de conclure la preuve du théorème 1.3 .

7.3 De la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes

Définition 7.5. Soit X un complexe polygonal pair dont le link de chaque sommet est de maille supérieure ou égale à quatre. Le *rayon d'auto-intersection* d'un hyperplan ramifié R est la distance minimale, dans \tilde{X} le revêtement universel de X , entre le voisinage combinatoire de deux hyperplans ramifiés de \tilde{X} se projetant sur R .

Le lemme suivant est énoncé pour les complexes cubiques mais la preuve reste valide pour les complexes polygonaux pairs et leur hyperplans ramifiés. Il nous assure que lorsque Γ est un réseau uniforme d'un complexe polygonal pair dont la maille en chaque sommet est supérieure ou égale à quatre, et que le stabilisateur d'un hyperplan ramifié est séparable, alors il existe un recouvrement fini de $\Gamma \backslash X$ tel que les hyperplans ramifiés y sont plongés, sans auto-tangence et sans auto-tangence d'ordre deux.

Lemme 7.6. [8, Lemma 8.8] *Soit X un complexe cubique compact, connexe, à courbure négative ou nulle. Soit H un hyperplan de X et supposons que $\pi_1(H)$ soit séparable. Pour tout $n \geq 0$, il existe un revêtement fini X' de X tel que le rayon d'intersection de tous les hyperplans de X' se projetant sur H soit $\geq n$.*

Nous pouvons maintenant voir comment le théorème 1.2 découle du théorème 1.3. Comme les hyperplans ramifiés sont convexes, le stabilisateur d'un hyperplan ramifié sera un sous-groupe quasi-convexe de Γ , et donc séparable par hypothèse. En trouvant un revêtement factorisant tous les revêtement finis (un par hyperplan de $\Gamma \backslash X$), on pourra trouver un sous-groupe Γ' satisfaisant les hypothèses du théorème 1.3 et en déduire la représentation recherchée.

8 Représentation des polygones de groupes selon Kapovich

Dans cette section, nous présentons la construction de Kapovich d'une représentation proprement discontinue et convexe-cocompacte du groupe fondamental G de certains polygones de groupes dans le groupe des isométries de \mathbb{H}^p . Nous suivons toujours la notation de [9]. Nous supposons dorénavant

que le n -gone de groupes P est à angles aigus, a un nombre pair de côtés et que les groupes de sommets sont finis. Cette dernière hypothèse permet de conclure que l'action de G sur le revêtement universel X de P est non seulement cocompacte mais aussi proprement discontinue. Il suit que X est quasi-isométrique, et ce de façon G -équivariante, à n'importe quel graphe de Cayley de G , voir [2, Part I, Proposition 8.19].

8.1 Séparabilité des sous-groupes quasi-convexes et conséquences

Tout d'abord, Kapovich introduit les hyperplans ramifiés, qui dans le cas spécifique des polygones de groupes peuvent être vus sous un autre angle. Il réussit ensuite à obtenir certains résultats sur le comportement local de ces hyperplans ramifiés. Finalement, grâce à la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes de G , il obtient un quotient compact de X ayant de bonnes propriétés de séparations pour les hyperplans ramifiés.

Pour commencer, Kapovich fixe une face F de X et note o son centre et m_j le centre de l'arête e_j . Alors $m_{pair} = \{m_{2j}, j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, et $m_{impair} = \{m_{2j-1}, j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ forment une partition des m_j . Il considère alors $\Gamma_{pair} := \text{cône de } m_{pair} \text{ sur } o$ ($\Gamma_{impair} := \text{cône de } m_{impair} \text{ sur } o$) et $T_{pair} := G_{pair} \cdot \Gamma_{pair}$, où G_{pair} désigne le groupe engendré par les groupes d'arêtes paires (et respectivement pour Γ_{impair} , T_{impair} et G_{impair}). T_{pair} (respectivement T_{impair}) est en fait un hyperplan ramifié tel que défini plus haut (voir 4.9).

On peut munir le complexe X d'une métrique CAT(-1) en exigeant que chaque face soit isométrique à un polygone régulier à angles droits de \mathbb{H}^2 . Kapovich s'intéresse plutôt à la métrique τ , déjà mentionnée ci-dessus, qui, pour chaque face F , rend chaque carré de la subdivision carré isométrique à un carré euclidien de longueur de côté un. Le groupe G agit toujours isométriquement, et (X, τ) est un espace CAT(0) puisque, par construction, le link de chaque sommet sera CAT(1) (voir 4.6).

Lemme 8.1. *Les sous-groupes G_{pair} et G_{impair} sont quasi-convexes.*

Démonstration. Rappelons que les hyperplans ramifiés sont convexes par rapport à la métrique τ . Les graphes de Cayley de G , G_{pair} et G_{impair} sont quasi-isométriques à X , T_{pair} et T_{impair} . L'action de G sur (X, τ) est propre,

cocompacte et par isométrie et donc l'espace demeure Gromov-hyperbolique avec la métrique τ . Comme T_{pair} (respectivement T_{impair}) est convexe dans X , on utilise la stabilité des quasi-géodésiques pour conclure que son image par la quasi-isométrie $X \rightarrow Cayley(G)$ est quasi-convexe, ce qui permet de conclure. \square

Comme Kapovich travaille avec les hyperplans ramifiés, qui pour chaque face qu'ils croisent sélectionnent les arêtes paires ou impaires, il est naturel pour lui de définir les fonctions suivantes :

$$impair(i) = \begin{cases} i - 1 & \text{si } i \text{ est pair,} \\ i & \text{sinon.} \end{cases} \quad pair(i) = \begin{cases} i - 1 & \text{si } i \text{ est impair,} \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour la suite, il sera important de savoir quels produits de la forme $h_j^{-1}g_i$ avec $g_i \in G_{x_i}$, $h_j \in G_{x_j}$ stabilisent les hyperplans ramifiés. Ceci permettra de mieux comprendre le comportement local des hyperplans ramifiés : nous verrons plus bas que ceci est relié à de bonnes propriétés de séparation des hyperplans ramifiés. Kapovich définit donc les ensembles suivants :

$$\Phi'_{pair} = h_j^{-1}g_i, g_i \in G_{x_i}, h_j \in G_{x_j} \text{ avec}$$

1. $i \neq j$ et $g_i \in G_{e_{pair(i)}}, h_j \in G_{e_{pair(j)}}$ ou
2. $i = j$ et $h_j^{-1}g_i \in G_{e_{pair(i)}}$

$$\Phi_{pair} = \{h_j^{-1}g_i \text{ avec } g_i \in G_{x_i}, h_j \in G_{x_j}\} \setminus \Phi'_{pair}$$

$$\Phi'_{impair} = h_j^{-1}g_i, g_i \in G_{x_i}, h_j \in G_{x_j} \text{ avec}$$

1. $i \neq j$ et $g_i \in G_{e_{impair(i)}}, h_j \in G_{e_{impair(j)}}$ ou
2. $i = j$ et $h_j^{-1}g_i \in G_{e_{impair(i)}}$

$$\Phi_{impair} = \{h_j^{-1}g_i \text{ avec } g_i \in G_{x_i}, h_j \in G_{x_j}\} \setminus \Phi'_{impair}$$

Nous observons que les éléments de Φ'_{pair} (respectivement Φ'_{impair}) stabilisent T_{pair} (respectivement T_{impair}). La proposition suivante signifie qu'aucun élément de Φ_{pair} (respectivement Φ_{impair}) ne fixe l'hyperplan ramifié T_{pair} (respectivement T_{impair}).

Proposition 8.2. [9, Proposition 2.8] $\Phi_{impair} \cap G_{impair} = \emptyset$ et $\Phi_{pair} \cap G_{pair} = \emptyset$.

Démonstration. Kapovich ne démontre l'affirmation que pour Φ_{impair} , l'autre cas étant totalement analogue. Tout au long de la preuve, la métrique utilisé sera la métrique $CAT(0)$ τ définie ci-dessus. Soient $g_l \in G_{x_l} \setminus G_{e_{\text{impair}(l)}}$ et z un sommet de $g_l(F)$. Alors il existe un segment géodésique σ de z à z' un point de $\Gamma_{\text{impair}} \subset F$. Ce segment σ est contenu dans $F \cup g_l(F)$ et rencontre Γ_{impair} orthogonalement. Si $z \notin F \cap g_l(F)$, alors $d(z, T_{\text{impair}}) > 1$. En effet, il est clair que dans le cas où $z \in F \cap g_l(F)$, $d(z, T_{\text{impair}}) = 1$. Dans les autres cas, $\text{longueur}(\sigma) > 1$ et une géodésique σ' de z vers T_{impair} de longueur ≤ 1 signifierait que l'hyperplan ramifié en question est une perpendiculaire commune entre σ et σ' , une impossibilité par 2.14. Soit $f = h_j^{-1}g_i$ et supposons que $f(T_{\text{impair}}) = T_{\text{impair}}$. Soit $z := h_j^{-1}$ et $w := f(x_{i+1})$ (si i est impair) et $w := f(x_{i-1})$ (si i est pair). Supposons que $h_j \notin G_{e_{\text{impair}(j)}}$. Alors $z = x_j$, car sinon nous obtenons une contradiction à $d(z, T_{\text{impair}}) > 1$. Donc $f \in G_{x_i}$. En utilisant le même raisonnement, on conclut que $w \in F$ et donc $f \in \Phi'_{\text{impair}}$. En appliquant le même raisonnement à $f^{-1} = g_i^{-1}h_j$, nous concluons que soit $h_j \in G_{e_{\text{impair}(j)}}$ et $g_i \in G_{e_{\text{impair}(i)}}$, soit $f \in G_{e_{\text{impair}(i)}}$. Ceci permet de conclure. \square

Corollaire 8.3. *Pour tout $g \in \Phi_{\text{pair}}$, $h \in \Phi_{\text{impair}}$, $gT_{\text{pair}} \cap T_{\text{pair}} = \emptyset$ et $hT_{\text{impair}} \cap T_{\text{impair}} = \emptyset$*

Définition 8.4. On dit qu'un groupe G satisfait la propriété LERF par rapport à un sous-groupe H , ou encore que le groupe H est séparable, si une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. Pour tout ensemble fini F de $G \setminus H$, il existe un homomorphisme $\phi : G \rightarrow \overline{G}$ avec \overline{G} est fini et $\phi(H) \cap \phi(F) = \emptyset$.
2. Pour tout ensemble fini F de $G \setminus H$, il existe un sous-groupe d'indice fini $G' \subset G$ tel que $H \subset G'$ et $F \cap G' = \emptyset$.

Corollaire 8.5. *Il existe un epimorphisme $\phi : G \rightarrow \overline{G}$, où \overline{G} est un groupe fini, tel que $\phi(\Phi_{\text{pair}}) \cap \phi(G_{\text{pair}}) = \emptyset$ et $\phi(\Phi_{\text{impair}}) \cap \phi(G_{\text{impair}}) = \emptyset$.*

Démonstration. Un résultat de [13] nous indique que les groupes quasi-convexes de G , donc en particulier G_{pair} et G_{impair} , sont séparables. On peut donc trouver des morphismes vers des groupes finis $\phi' : G \rightarrow \overline{G}'$ et $\phi'' : G \rightarrow \overline{G}''$ tels que $\phi'(\Phi_{\text{pair}}) \cap \phi'(G_{\text{pair}}) = \emptyset$ et $\phi''(\Phi_{\text{impair}}) \cap \phi''(G_{\text{impair}}) = \emptyset$. On conclut en prenant l'image du produit direct de ces deux morphismes. \square

On peut maintenant regarder le complexe correspondant à ce morphisme, i.e. le complexe compact $\overline{X} = X/\text{Ker}(\phi)$. Soient $\overline{T}_{\text{pair}}$ et $\overline{T}_{\text{impair}}$ les projections des hyperplans ramifiés T_{pair} et T_{impair} à \overline{X} . Les arêtes croisées par ces

hyperplans ramifiés définissent des sous-ensembles $\overline{S_{pair}}$ et $\overline{S_{impair}}$ des arêtes de \overline{X} . Considérons l'espace de Hilbert $H := L^2(\text{arêtes}(\overline{X}))$ et les deux éléments ξ et η correspondant aux fonctions caractéristiques de $\overline{S_{pair}}$ et $\overline{S_{impair}}$ respectivement. G agit sur H par précomposition : $g^*(a) = \phi(g)(a)$. Soit V l'espace vectoriel engendré par $G \cdot \{\eta, \xi\}$ et p sa dimension.

Lemme 8.6. *Si, pour $g_i \in G_{x_i}$ et $h_j \in G_{x_j}$, on a que $g_i \overline{T}_{pair} \cap h_j \overline{T}_{pair} \neq \emptyset$ (respectivement $g_i \overline{T}_{impair} \cap h_j \overline{T}_{impair} \neq \emptyset$), alors $h_j^{-1} g_i \in \Phi'_{pair}$ (respectivement $h_j^{-1} g_i \in \Phi'_{impair}$).*

Démonstration. Nous démontrons l'affirmation dans le cas de \overline{T}_{pair} . Ceci découle du choix du quotient. $g_i \overline{T}_{pair} \cap h_j \overline{T}_{pair} \neq \emptyset$ implique $g_i \overline{T}_{pair} = h_j \overline{T}_{pair}$ et donc $kh_j^{-1} g_i \in G_{pair}$ pour un certain $k \in Ker(\phi)$. Comme le quotient a été choisi de façon à ce que l'image de G_{pair} soit disjoint de Φ_{pair} , nous concluons que $h_j^{-1} g_i \in \Phi'_{pair}$. \square

Corollaire 8.7. *1. Les sous-groupes G_{pair} et G_{impair} fixent les vecteurs ξ et η respectivement.*

- 2. L'ensemble $\Sigma = \{g^*(\xi), g^*(\eta) : g \in G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n}\}$ est orthonormal*
- 3. $\forall g, h \in G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n}, g^*(\xi) \neq h^*(\eta)$*
- 4. $\forall g, h \in G_{x_1} \cup \dots \cup G_{x_n}, g^*(\xi) = h^*(\xi)$ (respectivement $g^*(\eta) = h^*(\eta)$) si et seulement si $h^{-1}g \in \Phi'_{pair}$ (respectivement $h^{-1}g \in \Phi'_{impair}$).*

Corollaire 8.8. *Cette représentation $G \curvearrowright V$ contient des sous-représentations $G_{x_i} \curvearrowright \text{Vectoriel}(Lk_{x_i})$ tels que les vecteurs orthonormaux $G_{x_i} \cdot \{\xi, \eta\}$ sont identifiés avec $G_{x_i} \cdot \text{Vectoriel}(Lk_{x_i})$, où $\text{Vectoriel}(Lk_{x_i})$ est l'espace vectoriel ayant comme base les sommets du link de x_i .*

Démonstration. Premièrement, Kapovich remarque que le stabilisateur dans G_{x_i} de ξ est exactement $G_{e_{pair(i)}}$ puisque nous avons $G_{x_i} \cap G_{pair} = G_{e_{pair(i)}}$. Il est donc possible de construire un plongement isométrique $\text{Vectoriel}(Lk_{x_i}) \rightarrow V$ en envoyant les deux éléments de $\text{Vectoriel}(Lk_{x_i})$ relié par la face F sur ξ et η et en étendant de façon équivariante. \square

Kapovich utilisera ces sous-représentations pour construire une représentation de G dans $Isom(\mathbb{H}^p)$ en utilisant le fait que G est le groupe fondamental d'un polygone de groupes. Dans le contexte plus général de la section 7, le corollaire 8.7 affirme que les hyperplans ramifiés de \overline{X} jouissent de certaines

propriétés de séparation. Observons tout d'abord que le link de chaque sommet de \overline{X} est biparti : fixant une face, les arêtes en un sommet sont divisées en celles qui correspondent à une arête paire ou impaire sous l'action du groupe.

Proposition 8.9. *Les hyperplans ramifiés de \overline{X} sont plongés et ne sont pas auto-tangents.*

Démonstration. Une auto-intersection signifierait qu'en un polygone, les deux hyperplans ramifiés se croisant sont en fait le même. Ceci implique qu'il faut multiplier par un élément $g \in G$, que $\xi = \eta$, une contradiction à 8.7.3. Supposons qu'il y a auto-tangence en une face F , i.e. deux arêtes e_1 et e_2 partageant un sommet x sont traversées par un même hyperplan ramifié. Sans perte de généralité, supposons que les arêtes e_1 et e_2 soient paires et soit $g \in G_x$ un élément tel que $g(e_1) = e_2$. Alors, dans 8.6, on peut prendre $g = g_i$ et $h_j = id$. On en déduit que $g_i \in \Phi'_{pair}$ et donc $g \in G_{e_{pair(i)}}$, une contradiction au choix de g . \square

Alors que la construction de la section 7 utilise l'absence d'inter-tangence pour conclure que l'application $\eta : X \rightarrow \Sigma(W, S)$ est un plongement isométrique, une paire d'hyperplans ramifiés inter-tangents pourrait très bien être présente dans le quotient \overline{X} . En utilisant la séparabilité des sous-groupes quasi-convexes, il serait possible de trouver un sous-groupe d'indice fini de G , peut-être différent de celui utilisé par Kapovich, tel que le quotient n'ait pas d'inter-tangence. Le quotient \overline{X} possède toutefois une autre propriété, l'absence d'auto-tangence d'ordre deux : pour une suite de trois arêtes consécutives, l'hyperplan ramifié croisant la première est le même que celui croisant la troisième si et seulement si la suite d'arête est contenu dans une même face (voir 9.10). Ceci découle de 8.7.4. Nous verrons qu'il est possible de faire fonctionner la construction de la section 7 en utilisant cette propriété. Voir la section 9.

Remarque 8.10. On en déduit que X satisfait les hypothèses du théorème 1.3 si $n \geq 8$.

8.2 Représentation

L'idée de cette section est la suivante. Kapovich commence par construire une représentation ρ du groupe fondamental G du polygone de groupes vers

le groupe des isométries de \mathbb{H}^p . Grâce au corollaire 8.8, Kapovich pourra construire un plongement quasi-isométrique ρ -équivariant $X \rightarrow \mathbb{H}^p$. Par 3.12, ceci lui permet de déduire une représentation proprement discontinue et convexe-cocompacte $G \rightarrow Isom(\mathbb{H}^p)$.

Pour construire une représentation $\rho : G \rightarrow Isom(\mathbb{H}^p)$, il faut construire une série de représentations $\rho_i : G_{x_i}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_{e_i} & & \\
 & \longleftarrow & & \longrightarrow & \\
 G_{x_i} & & & & G_{x_{i+1}} \\
 & \searrow \rho_i & & \swarrow \rho_{i+1} & \\
 & & Isom(\mathbb{H}^p) & &
 \end{array}$$

Soit $Lk_{x_i}^0$ l'ensemble des sommets de $link(x_i, X)$. $Lk_{x_i}^0$ contient deux éléments f_i^+ et f_i^- auxquels nous porterons une attention particulière et qui correspondent aux directions de x_i vers, respectivement, x_{i+1} et x_{i-1} . Nous noterons $Lk_{x_i}^\bullet := Lk_{x_i}^0 \setminus \{f_i^+, f_i^-\}$.

Kapovich prend donc un polygone à angles droits F ayant le même nombre de côtés n que P et le plonge isométriquement dans \mathbb{H}^p , où p est la dimension de l'espace vectoriel V , de façon à ce que les directions f_i^\pm correspondent aux éléments $\vec{f}_i^\pm \in T_{x_i}\mathbb{H}^2$ tangents à F . Soit R_i la réflexion en l'hyperplan médiateur de l'arête e_i de F et $J_i = R_{i-1} \circ \dots \circ R_1$. Observons que comme le nombre de côtés est pair, $J_{n+1} = id$. Kapovich note V_i l'espace tangent de \mathbb{H}^p en x_i et N_i le complément orthogonal de $T_{x_i}F$ dans V_i .

Grâce à la structure de polygone de groupes, Kapovich peut construire une action de chaque G_{x_i} sur (la base orthonormée de) l'espace tangent en le sommet de F correspondant. L'espace vectoriel V , contenant toutes ces représentations, se "déplie" alors pour donner l'action de G appropriée sur l'espace tangent de chaque sommet. Dans la construction de la section 7, ce sont en quelque sorte les hyperplans ramifiés qui jouent ce rôle : ils correspondent aux vecteurs de la base orthonormée.

Proposition 8.11. [9, Proposition 5.3] *Il existe une collection de représentations linéaires, fidèles et isométriques $d\rho_i : G_{x_i} \rightarrow V_i$, pour $i = 1, \dots, n$, telle que*

1. Chaque représentation $d\rho_i$ contient une sous-représentation $G_{e_i} \curvearrowright \text{Vect}(Lk_{x_i}^0)$ de façon à ce que les vecteurs f_i^\pm soient identifiés avec les directions appropriées $\overrightarrow{f_i^\pm}$ dans le polygone à angles droits F immergé dans \mathbb{H}^P .
2. Chaque réflexion $R_i : \mathbb{H}^P \rightarrow \mathbb{H}^P$ induit un isomorphisme de $\mathbb{R}G_{e_i}$ -modules

$$(V_i, d\rho_i(G_{e_i}) \rightarrow (V_{i+1}, d\rho_{i+1}(G_{e_i}))$$

3. Les espaces $\text{Vect}(Lk_{x_i}^\bullet) \subset N_i$ et $\text{Vect}(Lk_{x_j}^\bullet) \subset N_j$ sont mutuellement orthogonaux si $|i - j| \geq 2$. Si $j=i+1$, alors $\text{Vect}(Lk_{x_i}^0 \setminus G_{e_i} \{f_i^+, f_i^-\}) \subset N_i$ et $\text{Vect}(Lk_{x_{i+1}}^0 \setminus G_{e_i} \{f_{i+1}^+, f_{i+1}^-\}) \subset N_{i+1}$ sont orthogonaux.

Démonstration. Précédemment, Kapovich a construit une représentation $G \curvearrowright V$ contenant des sous-représentations $G_{x_i} \curvearrowright \text{Vectoriel}(Lk_{x_i})$. Il faut maintenant obtenir des isométries $\phi_i : V \rightarrow V_i$: ceci nous fournira les représentations souhaitées en conjuguant.

$$d\rho_i := \phi_i \circ (G_{x_i} \curvearrowright V_i) \circ \phi_i$$

Kapovich prend tout d'abord une isométrie quelconque $\phi_1 : V \rightarrow V_1$ envoyant les vecteurs ξ et η sur les directions $\overrightarrow{f_1^\pm}$. On peut alors définir

$$\phi_i := J_i \circ \phi_1$$

En d'autres mots, les isométries subséquentes sont obtenues à partir de ϕ_1 en appliquant les réflexions qui s'imposent.

Le groupe G_{e_1} fixe le vecteur $\eta \in V$ et donc, $\rho(G_{e_1})$ fixe le vecteur $\phi_1(\eta) = \overrightarrow{f_1^+}$. Ainsi,

$$dR_1 \circ d\rho_1|_{G_{e_1}} = \rho_2|_{G_{e_1}}$$

Le même raisonnement s'applique pas à pas pour montrer

$$dR_i \circ d\rho_i|_{G_{e_i}} = \rho_{i+1}|_{G_{e_i}}$$

Ces relations permettent à Kapovich de recoller les différentes représentations ensemble et les deux premières affirmations de la proposition sont donc démontrées.

Comme, dans son article, Kapovich traite le cas $j = i + 1$, nous traiterons ici le cas $|i - j| \geq 2$. Soit donc $v \in V_i$ et $w \in V_j$. Pour montrer qu'ils sont orthogonaux, il est suffisant de démontrer qu'ils sont différents puisque Σ est orthonormal. Si $v \in G\xi$ et $w \in G\eta$, alors ils sont sûrement différents. On peut donc supposer que $v = g^*(\eta)$ et $w = h^*(\eta)$. Par 8.7.4, ceci implique que $h^{-1}g \in \Phi'_{\text{impair}}$. Comme g et h ne fixent pas un sommet commun, on doit avoir $g \in G_{e_{\text{impair}(i)}}$ et $h \in G_{e_{\text{impair}(j)}}$. Donc ils fixent tous les deux le vecteur η . Donc $\phi_i(v) \in G_{e_i} \overrightarrow{f_i^\pm}$ et $\phi_j(w) \in G_{e_j} \overrightarrow{f_j^\pm}$. Nous avons donc bien que si $v = w$, $v \in Lk_{x_i}^0 \setminus Lk_{x_i}^\bullet$ et $w \in Lk_{x_j}^0 \setminus Lk_{x_j}^\bullet$, ce qui complète la preuve. \square

Ces représentations ayant été construites, il est possible d'utiliser l'application exponentielle pour obtenir des actions isométriques $\rho_i : G_{x_i} \curvearrowright \mathbb{H}^p$ fixant les points x_i respectivement. Kapovich remarque que $\rho_i(G_{e_i})$ fixe l'arête e_i de $F \subset \mathbb{H}^p$ (similairement, $\rho_i(G_{e_{i-1}})$ fixe l'arête e_{i-1} de $F \subset \mathbb{H}^p$) puisque $d\rho_i(G_{e_i})$ fixe la direction appropriée dans l'espace tangent. Ainsi, R_i commute avec l'action de $\rho_i(G_{e_i})$ et de $\rho_{i+1}(G_{e_i})$. Les représentations ρ_i et ρ_{i-1} concordent sur le sous-groupe G_{e_i} , ce qui assure la commutation du diagramme et nous fournit une action isométrique $\rho : G \curvearrowright \mathbb{H}^p$.

Il reste maintenant à construire un plongement ρ -équivariant $X \rightarrow \mathbb{H}^p$ qui satisfait les hypothèses d'orthogonalité requises par 6.5. Comme il y a une action transitive sur les faces du groupe G , il y a une façon naturelle de plonger X grâce à ρ . Kapovich plonge un polygone F dans \mathbb{H}^p , correspondant à une face fixée de X , et auquel nous penserons comme correspondant à l'identité du groupe G . Nous définissons donc μ comme

$$\mu|_{gF} = \rho(g) \circ \mu|_F$$

Cette application est bien définie puisque si un élément g est dans un groupe de face/arête/sommet, alors, par construction, cet élément fixera l'image de la facette appropriée point par point. Il ne nous reste plus qu'à démontrer que les hypothèses d'orthogonalités sont respectées pour conclure que ρ , qui est G -équivariant, est aussi un plongement quasi-isométrique. Par équivariance, il est suffisant de vérifier l'orthogonalité pour 2 faces $F' \neq F''$ adjacentes à F . Nous examinons un cas possible. Supposons donc

que $F' = gF$ avec $g \in G_{e_i}$ et $F'' = hF$ avec $h \in G_{e_{i+1}}$. Par hypothèse sur la maille (le polygone de groupes ayant été choisi aigu), F' et F'' ne partagent pas d'arête. Ainsi, les directions orthogonales à F de F' et F'' sont distinctes et donc orthogonales, et les directions de F' et F'' partagées avec F sont orthogonales puisque F est choisi à angles droits. Nous laissons la vérifications des autres cas au lecteur, référant à l'article de Kapovich [9] où un autre cas est traité.

Ceci termine la preuve du théorème 1.1.

8.3 Les deux représentations coïncident

Il nous reste maintenant à voir que les deux représentations construites, dans le cas des n -gones de groupes finis à angles aigus et avec $n = 2m \geq 8$, coïncident. Il est suffisant de démontrer que l'action des générateurs est la même. Pour ce faire, soit $g \in G_{x_i}$. Cet élément d'ordre fini fixe le sommet $x_i \in \mathbb{H}^p$ et permute les hyperplans ramifiés de X . Lorsque l'on applique la construction de la section 7 pour obtenir un plongement quasi-isométrique, les éléments de Γ' agissent par multiplication sur le 1-squelette du complexe de Davis $\Sigma(W, S)$, qui n'est autre que le graphe de Cayley associé à S . Ils ne fixent donc aucun sommet de $\Sigma(W, S)^{(0)}$. Ainsi, dans le langage de 7.2, $c(g) = id$. Ainsi $\Psi(g) = \psi(g)$ et g agit aussi par permutation d'hyperplans. Il suffit donc de voir que l'action d'un générateur sur les hyperplans ramifiés capture entièrement l'action du groupe fondamental du polygone de groupe. Supposons donc que $g \in G_{x_i}$ fixe tous les hyperplans ramifiés. En particulier, par le choix du quotient \bar{X} , on doit avoir que $g \in G_{e_{\text{impair}(i)}} \cap G_{e_{\text{pair}(i)}}$ (voir 8.7). Nous concluons, grâce au lemme 5.4 et à l'hypothèse que la maille est supérieure ou égale à 4, que $g \in G_F$. Comme ceci sera vrai pour toute les faces du complexes, nous avons bien que $g = id$.

9 Plongement quasi-isométrique de complexes polygonaux $CAT(0)$

Le but de cette section est de démontrer un résultat général sur certaines applications polygonales entre complexes polygonaux pairs $CAT(0)$. Ceci permettra de prouver deux affirmations laissées en suspens suite à la section 7 : sous les hypothèses de Kapovich, l'application $X \rightarrow \Sigma(W, S)$ est un plon-

gement quasi-isométrique, ainsi que la composition de η avec l'application $\Sigma(W, S) \rightarrow \Sigma(W_m, S)$.

9.1 Les complexes polygonaux pairs $CAT(0)$ et leurs hyperplans

Nous commençons par quelques définitions et propriétés des complexes polygonaux $CAT(0)$.

Définition 9.1. Une application entre deux complexes polygonaux pairs est dite *polygonale* si elle envoie k -cellule sur k -cellule, pour $k = 0, 1, 2$.

Définition 9.2. [7, Section 3] Un *mur* est une partition d'un ensemble Y en deux sous-espaces : les *demi-espaces* définis par le mur. Un *système de murs* est un ensemble de murs tels que pour tout couple $x \neq y \in Y$, l'ensemble $\mathcal{M}(x, y)$ des murs séparant x et y est fini et non vide. Un *espace à murs* (Y, \mathcal{M}) est un ensemble Y équipé d'un système de murs \mathcal{M} .

Observation 9.3. [7] Considérons les hyperplans naturels dans un complexe polygonaux pair $CAT(0)$ X , c'est-à-dire la même construction que pour les hyperplans ramifiés, mais plutôt que de joindre une arête sur deux, on joint deux arêtes opposées, notion bien définie par le fait que le complexe est pair. Dans le cas des complexes cubiques de dimension deux, on retrouve les hyperplans tels que définis dans la définition 4.4.

Comme dans le cas des hyperplans d'un complexe cubique et des hyperplans ramifiés d'un complexe polygonaux pair, nous pouvons définir les notions d'arêtes duales et de voisinage combinatoire.

Définition 9.4. Soit H un hyperplan d'un complexe polygonaux pair. Les *arêtes duales* à H sont celles dont le milieu coïncide avec l'image d'un sommet de H . Nous notons l'ensemble des arêtes duales à H par $D(H)$. Le *voisinage combinatoire* $V(H)$ de H est l'ensemble des cellules d'intersection non vide avec l'image de H .

Lemme 9.5. [7, Lemme 4.4] Soit P un complexe polygonaux pair $CAT(0)$ et M l'hyperplan intersectant une arête a . Alors M est convexe dans P et sépare P en deux composantes connexes.

Corollaire 9.6. Pour P un complexe polygonaux pair $CAT(0)$, l'ensemble des demi-espaces définis par les hyperplans de P est un système de mur pour son 0 -squelette.

Lemme 9.7. [7, Lemme 4.7] Soit c un chemin combinatoire dans le 1-squelette de P d'extrémités x et y .

1. Un hyperplan sépare x et y si et seulement s'il apparaît un nombre impair de fois dans la suite des hyperplans traversés par c
2. Si la suite des hyperplans traversés est sans répétition, alors c est une géodésique.

Proposition 9.8. [7, Proposition 4.11] Un chemin combinatoire du 1-squelette est une géodésique si et seulement si la suite d'hyperplans qu'il traverse est sans répétition.

Définition 9.9. Par le résultat précédent, on peut définir la *distance des murs* entre deux sommets x et y d'un complexe polygonal pair $CAT(0)$ comme le nombre de murs les séparant.

9.2 Convexité combinatoire des hyperplans et démonstration

Dans cette section, nous notons $H(e)$ l'hyperplan (non-ramifié) traversant une arête donnée e dans un complexe polygonal pair. Nous aurons besoin d'une généralisation de l'auto-tangence, présente dans l'article de Kapovich même si elle n'y est pas explicitée.

Définition 9.10. Un hyperplan ramifié R dans un complexe polygonal pair est *auto-tangent d'ordre deux* s'il existe une suite de trois arêtes consécutives, non contenues dans une même face, telle que la première et la troisième sont duales à R .

Remarque 9.11. Le complexe $\bar{X} = X/Ker(\phi)$ de la section 8 ne possède pas d'auto-tangence d'ordre deux. Voir la remarque suivant le corollaire 8.9.

Nous introduisons une autre notion de convexité, mieux adaptée lorsque l'on travaille avec le 1-squelette et la distance de murs.

Définition 9.12. Un sous-ensemble du 0-squelette d'un complexe polygonal est dit *combinatoirement convexe* si toute géodésique du 1-squelette ne traverse que des sommets du sous-ensemble.

Définition 9.13. Considérons X un complexe polygonal pair. La *subdivision triangulaire* de X est le complexe obtenu en subdivisant chaque n -gone en n triangles équilatéraux d'angle $\pi/3$, chaque triangle ayant comme sommets le centre et deux sommets consécutifs du polygone.

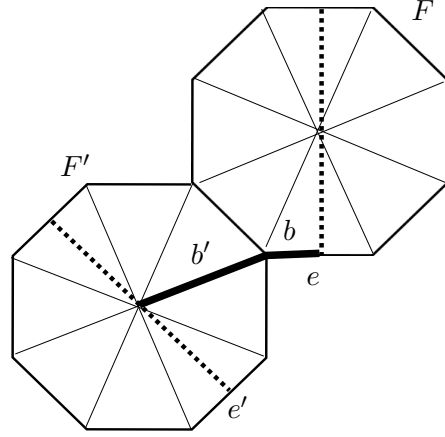


FIGURE 5 – La perpendiculaire démontrant que les deux hyperplans (en trait pointillé) sont disjoints

Lemme 9.14. *Considérons X un complexe polygonal pair $CAT(0)$ dont chaque polygone possède au moins six côtés. Soient F et F' deux faces partageant un sommet ou une arête, et H un hyperplan traversant F , respectivement H' un hyperplan traversant F' . Alors les hyperplans H et H' sont disjoints sauf s'il existe deux arêtes $e \subset F$, $e' \subset F'$, duales à H et H' respectivement, telles que e et e' sont contenues dans une même face.*

Démonstration. Il est clair que si les deux arêtes appartiennent à une face commune, les hyperplans associés se croisent en cette face. Supposons d'abord que $F \cap F'$ est une arête a . Nous remarquons que la subdivision triangulaire est toujours un espace $CAT(0)$. Alors, dans la subdivision triangulaire, l'image de $H(a)$ est géodésique et rencontre les images de H et H' avec un angle $\geq \pi/2$. Dans le cas où $F \cap F'$ est un sommet v , on considère dans la subdivision triangulaire de F le segment b défini comme suit. S'il existe e duale à H et ayant v comme sommet, alors b est le segment joignant le milieu de e à v . Sinon, b est l'arête de la subdivision triangulaire joignant v au centre de F . On définit b' dans la subdivision triangulaire de F' de façon analogue. Dans tous les cas, $b \cup b'$ est une géodésique, faisant un angle $\geq \pi/2$ avec H et H' . Ceci permet de conclure par le même argument que 2.14. Voir la figure 5. \square

Lemme 9.15. *Soit X un complexe polygonal pair $CAT(0)$ dont chaque polygone possède au moins six côtés. Le 0-squelette du voisinage combinatoire*

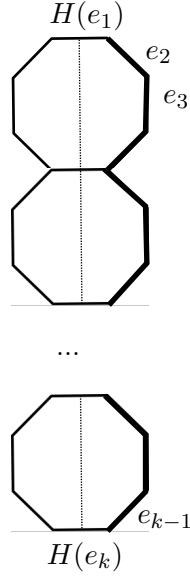


FIGURE 6 – La géodésique $\tilde{\gamma}$

d'un hyperplan H est combinatoirement convexe.

Démonstration. Soit γ une géodésique entre deux points $x, y \in V(H)^{(0)}$ et supposons qu'il existe un premier point z tel que $z \notin V(H)^{(0)}$ et soit z' le point précédent z dans γ (il appartient donc à $V(H)^{(0)}$). Nous affirmons que l'hyperplan traversant l'arête $\overline{zz'}$ sépare $V(H)^{(0)}$ de z' . En effet, les deux hyperplans sont disjoints par le lemme 9.14 (voir aussi la figure 5). Le chemin γ doit donc retraverser l'hyperplan $H(\overline{zz'})$ pour rejoindre y , ce qui contredit le fait que γ est une géodésique. \square

Définition 9.16. Une application polygonale entre deux complexes polygonaux pairs $\varphi : Z \rightarrow Y$ est dite *3-pleine* si, lorsque l'image de trois arêtes consécutives est contenue dans une même face $F' \subset Y$, alors il existe une face $F \subset Z$ contenant ces trois arêtes telle que $\varphi(F) = F'$.

Proposition 9.17. *Soit Y et Z deux complexes polygonaux pairs dont tous les polygones ont au moins huit côtés. Une application $\varphi : Z \rightarrow Y$ qui est polygonale, localement injective et 3-pleine est une isométrie pour la distance des murs.*

Démonstration. Supposons que l'affirmation n'est pas vraie. Alors il existe une plus courte géodésique $\gamma = e_1, e_2 \dots e_k \subset Z$ telle que $\varphi(\gamma) = e'_1, e'_2 \dots e'_k \subset Y$ n'est pas géodésique, c'est-à-dire qu'il existe une répétition dans la suite d'hyperplans rencontrés par $\varphi(\gamma)$. Comme nous avons choisi un contre-exemple minimal, $H(e_1) = H(e_k)$ et $e'_2 \dots e'_k$ est une géodésique, que nous noterons $\tilde{\gamma}$. Les extrémités de $\tilde{\gamma}$ sont dans $V(H(e_1))$, qui est combinatoirement convexe, et donc $\tilde{\gamma} \subset V(H(e_1))$. Comme les hyperplans de Y sont plongés, le lemme 9.14 nous permet de conclure que outre les arêtes duales à $H(e_1)$, une arête de $V(H(e_1))$ n'appartient qu'à une seule 2-cellule de $V(H(e_1))$. La géodésique $\varphi(\gamma)$ suivra donc le contour des polygones traversés par l'hyperplan $H(e_1)$, tel qu'illustré sur la figure 6. Dans Z , γ aura la même forme puisque les faces de Y suivies par φ pourront être tirées en arrière grâce à l'hypothèse que φ est 3-pleine. On conclut que $H(e_1) = H(e_k)$, ce qui contredit le fait que γ est géodésique. \square

Corollaire 9.18. *L'application $X \rightarrow \Sigma(W_m, S)$ mentionnée au début de cette section est un plongement quasi-isométrique pour la métrique $CAT(0)$.*

Démonstration. Rappelons que nous notons $R(a)$ l'hyperplan ramifié passant par une arête a . Le complexe équipé de la distance des murs est quasi-isométrique au complexe équipé de la métrique $CAT(0)$. L'application est polygonale par construction et l'injectivité locale a été vérifiée dans la section 7. Il suffit donc de voir que l'application est 3-pleine pour démontrer l'affirmation. Supposons donc qu'il y a trois arêtes consécutives a_1, a_2 et a_3 dont l'image est contenue dans une même face dans $\Sigma(W_m, S)$. Les images de a_1 et de a_3 sont donc traversées par le même hyperplan ramifié et les arêtes sont du même type, c'est-à-dire qu'elles sont associées au même générateur de W_m . Supposons qu'il n'existe pas de face dans X contenant ces trois arêtes. $R(a_1)$ et $R(a_3)$ seront envoyés sur le même hyperplan ramifié par la projection $X \rightarrow \bar{X}$ puisque les images de a_1 et a_3 ont le même type. Ceci contredit l'absence d'auto-tangence d'ordre deux dans le complexe \bar{X} . Ceci nous permet de conclure que l'application est une isométrie pour la distance des murs. \square

Références

- [1] B. BOWDITCH, *Geometrical finiteness with variable curvature*, Duke Mathematical Journal, 77 (1995), p. 229–274.
- [2] M. BRIDSON ET A. HAEFLIGER, *Metric Spaces of non-positive curvature*, vol. 319 de Grundlehren series, Springer-Verlag, 1999.
- [3] M. W. DAVIS, *The geometry and topology of Coxeter groups*, vol. 32 de London Mathematical Society Monograph Series, Princeton University Press, 2008.
- [4] R. GEOGHEGAN, *Topological methods in Group Theory*, vol. 243 de Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2008.
- [5] E. GHYS ET P. DE LA HARPE, *Sur les groupes hyperboliques d’après M. Gromov*, vol. 83 de Progress in Mathematics, Birkhauser, 1990.
- [6] A. HAEFLIGER, *Complexes of groups and orbihedra*, in Group Theory from a Geometrical Viewpoint, World Sci. Pub., 1991, p. 504–542.
- [7] F. HAGLUND ET F. PAULIN, *Simplicité de groupes d’automorphismes d’espaces à courbure négative*, in The Epstein Birthday shrift, Geometry and Topology Monographs, 1998, p. 181–248.
- [8] F. HAGLUND ET D. WISE, *Special cube complexes*, Geometric and Functional Analysis, 17 (2008), p. 1551–1620.
- [9] M. KAPOVICH, *Representations of polygons of finite groups*, Geometry and Topology, 9 (2005), p. 1915–1951.
- [10] J. RATCLIFFE, *Foundations of Hyperbolic manifolds*, vol. 149 de Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.
- [11] M. SAGEEV, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, Proc. London Math. Soc., 149 (1995), p. 585–617.
- [12] J. STALLINGS, *Non-positively curved triangles of groups*, in Group Theory from a Geometric Viewpoint, World Sci. Pub., 1991, p. 91–103.
- [13] D. WISE, *The residual finiteness of negatively curved polygons of finite groups*, Invent. Math., 149 (2002), p. 579–617.