Quelques remarques autour des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$

Stefano Morra

Mémoires de M2 en Mathématiques, année 2007-2008
Université de Paris-Sud

Sous la direction de A. Mézard,
Université de Versailles-Saint-Quentin

Résumé. On étudie le k-module $\mathrm{Sym}^n(k^2)$, soit en tant que représentation du k-groupe algébrique $\mathbb{GL}_2$, soit en tant que représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ lorsque $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. Dans ce cas, on explicite des résultats de Breuil ([2]) et Glover ([8]) pour rediger une liste, avec les multiplicitées, des facteurs de la representation $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$.

Abstract. We study the k-module $\mathrm{Sym}^n(k^2)$, both as a representation of the k-algebraic group $\mathbb{GL}_2$ and as a smooth representation of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ as soon as $k = \overline{\mathbb{F}}_p$. In the latter, we make explicit some results of Breuil ([2]) and Glover [8] to list, with multiplicty, the Jordan-Hölder factors of the representation $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$, for any $n \in \mathbb{N}$.

Table des matières

Introduction

L'object de ce mémoire est une introduction à l'étude des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique p. La recherche d'un analogue p-adique pour la conjecture de Langlands classique n'en est qu'à ses débuts, alors que le cas de caractéristique 0 a été démontré grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens -Langlands, Weil, Jacquet, Kutzko- et généralisé au cas ℓ-adique par Harris-Taylor [9] et Henniart [10].
On dispose de plusieurs résultats concernant la conjecture de Langlands en caractéristique p. Par exemple, les travaux de Breuil et Colmez établissent une correspondance de type Langlands entre certaines représentations du groupe de Weil $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. En revanche, on n'a pas encore une généralisation de cette correspondance pour une extension finie $F \supsetneq \mathbb{Q}_p$. Breuil a montré qu'ils existent "beaucoup plus" de représentations irréductibles lisses admissibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_2(F)$ que représentations irréductibles lisses de dimension 2 de $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$.

Ce travail de stage se concentre sur l'étude de la représentation $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, pour $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers d'une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$.

Il comprend deux parties. Dans la première, on se place dans le contexte général des schémas en groupes affines. En particulier, le paragraphe §2 expose la théorie classique des représentations linéaires des schémas en groupes algébriques, en utilisant le langage fonctoriel que l'on retrouve dans [11] et [13]. De plus, on a mis en évidence dans §2.1.1 le lien avec la définition de la théorie géométrique des invariants de Mumford.

La deuxième partie est consacrée à l'étude concrète des représentations de $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Il s'agit essentiellement d'un travail combinatoire qui permet de déduire les représentations (irréductibles lisses) de $\mathbb{Z}_p$ (§4) et de décrire $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ comme extension de certains représentions semisimples de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, pour $n \in \{p, \ldots, 2p-2\}$.

Enfin, à l'aide des quelques résultats de Glover [8], on dresse une liste explicite des facteurs de Jordan-Hölder de $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ pour $n \geq 2p-1$.

Chapitre 1

Quelques rudiments sur les groupes algébriques affines

Le but de ce chapitre est de donner les notions élémentaires et le formalisme de base concernant les groupes algébriques affines. Plus précisement, on commence par introduire la notion de *schéma affine en groupes* selon le langage fonctoriel(§1.1). Ensuite, on introduit lemme de Yoneda, ainsi que les notions fondamentals d'extention de scalaires et de produit de groupes algébriques. Enfin, dans §1.3, on definit la catégorie des bialgèbres, en lien avec les schémas en groupes.
Dans ce chapitre on a suivi essentiellement les ouvrages de Jantzen [11] et Milne [13]

1.1 Définitions et exemples

Dans ce mémoire, tout anneau est commutatif et unitaire ; fixons un anneau (dit de "base") A.
Le terme "A-foncteur" désigne un foncteur $F : A\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est une catégorie arbitraire. L'exemple le plus important de A-foncteur est donné par le *Spectre* [1] : si R est une A-algèbre fixée le spectre de R est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}p_A(R) : A\text{-}\mathscr{A}lg & \longrightarrow & \mathscr{E}ns \\ B & \longmapsto & \mathrm{Hom_A}(R,B) \\ \alpha : B \to C & \longmapsto & \mathrm{Hom_A}(R,B) \overset{\alpha\circ -}{\to} \mathrm{Hom_A}(R,C). \end{array}$$

Un A-*schéma affine* est un A-foncteur isomorphe à $\mathbb{S}p_A(R)$ pour R une A-algèbre ; autrement dit, c'est un A-foncteur représentable. D'après le Lemme

[1] en fait, toute la théorie des schémas en groupe se fonde sur l'étude de tels exemples.

de Yoneda, le représentant R de F est unique, à *unique* isomorphisme près (cf. §1.2). Un A-schéma affine F est dit *algébrique* si son représentant est une A-algèbre de type fini.
Un A-*schéma affine en groupes* est un A-foncteur dans la catégorie $\mathscr{G}p$ des groupes, qui est un schéma affine en tant que foncteur dans $\mathscr{E}ns$ (i.e. composé avec le foncteur oubli $\mathscr{F}or : \mathscr{G}p \to \mathscr{E}ns$) ; en particulier, les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(R, B)$ héritent d'une structure *naturelle* du groupe [2] .

Remarque 1.1 Supposons A noetherien. Soit $I \trianglelefteq A[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal, et $f_1, \cdots, f_r \in A[X_1, \ldots, X_n]$ une famille finie de générateurs de I. Alors on a un isomorphisme *fonctoriel* :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A[X_1, \ldots, X_n]/I, R) & \xrightarrow{\sim} & \{(\underline{a}) \in R^n \ \text{ tel que } \ f_i(\underline{a}) = 0 \ \text{ pour } \ 0 \leq i \leq r\} \\ \phi & \mapsto & (\phi(X_i))_{0 \leq i \leq r} \end{array}$$

qui est donné par le "principe de substitution" et par la propriété universelle du quotient.

Exemple 1.1 On définit le A-foncteur $\mathbb{G}_a : A\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{G}p$ en associant à la A-algèbre R, son groupe additif sous-jacent : $\mathbb{G}_a(R) \stackrel{\text{def}}{=} (R, +)$ (et en opérant de manière évidente sur les morphismes). Alors, le "principe de substitution" montre que $\mathbb{G}_a$ est un groupe algébrique :

$$\mathbb{G}_a(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A[X], R).$$

Pour $R = A[X]$, $\mathrm{id}_{A[X]}$ s'identifie à $X \in A[X]$ qui n'est pas l'unité de $(A[X], +)$.

Exemple 1.2 On définit le A-foncteur $\mathbb{G}_m$ en posant $\mathbb{G}_m(R) \stackrel{\text{def}}{=} (R^\times, \cdot)$ i.e. le groupe des unités $R^\times$ muni de la structure de groupe induit par la multiplication (et $\mathbb{G}_a$ opère de la manière évidente sur les morphismes). Alors, la propriété universelle de localisation induit un isomorphisme fonctoriel

$$\mathbb{G}_m(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A[X, X^{-1}], R)$$

qui fait de $\mathbb{G}_m$ un groupe algébrique.

Exemple 1.3 On définit le A-foncteur $\mathbb{GL}_n$ en posant $\mathbb{GL}_n(R) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_n(R)$ (où $\mathrm{GL}_n(R)$ est le groupe des matrices inversibles à coefficients dans R). Encore une fois, la propriété universelle de la localisation donne un isomorphisme fonctoriel :

$$\mathbb{GL}_n(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}, (\det(X_{i,j})_{i,j})^{-1}], R)$$

et $\mathbb{GL}_n$ est bien un groupe algébrique représenté par $A[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}, (\det(X_{i,j})_{i,j})^{-1}]$.

[2] mais $\mathrm{id}_R \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(R, R)$ n'est pas en général l'unité de la structure de groupe (cf. l'exemple 1.1).

Exemple 1.4 On considère le foncteur $\{1\} : A\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{G}p$ qui associe à n'importe quelle A-algèbre R l'objet initial de $\mathscr{G}p$ (le groupe trivial). Ainsi,

$$\{1\}(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A, R).$$

On dit que $\{1\}$ est le groupe algébrique trivial.

Exemple 1.5 On considère le foncteur $\mu_n : A\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{G}p$ défini par $\mu_n(R) \overset{\text{def}}{=} \{r \in R\,\text{tel que}\, r^n = 1\}$. Alors (propriété universelle du quotient) :

$$\mu_n(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A[X]/(X^n - 1), R).$$

On en déduit que μ_n est un groupe algébrique représenté par $A[X]/(X^n - 1)$.

Exemple 1.6 Supposons A de caractéristique p. Alors $\alpha_p(R) \overset{\text{def}}{=} \{r \in R \text{ tel que } r^p = 0\}$ est un groupe additif, qui définit un groupe algébrique, car :

$$\alpha_p(R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(A[X]/(X^p), R).$$

1.2 Morphismes et lemme de Yoneda

Soit R une A-algèbre, F un A-foncteur et soit $\mathcal{F} : \mathbb{S}p_A(R) \to F$ un morphisme naturel de A-foncteurs ; rappelons que si B est une R-algèbre, on note $\mathcal{F}_B$ le morphisme (dans la catégorie $\mathscr{E}ns$) $\mathbb{S}p_A(R)(B) \to F(B)$ obtenu par spécialisation de $\mathcal{F}$. On s'intéresse au cas particulier :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}p_A(R)(R) & \overset{\mathcal{F}_R}{\to} & F(R) \\ \mathrm{id}_R & \mapsto & x_{\mathcal{F}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}_R(\mathrm{id}_R). \end{array}$$

Pour $\alpha : R \to B$ dans $\mathbb{S}p_A(R)(B)$ alors $\mathcal{F}_B(\alpha) = F(\alpha)(x_{\mathcal{F}})$, d'après le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id} \in & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(R, R) \arrow[r, "\mathcal{F}_R"] \arrow[d] & F(R) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(R, B) \arrow[r] & F(B). \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, si $x \in F(R)$, on définit une transformation naturelle $\mathcal{F}_x$ en posant

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}_{x,B} : \mathbb{S}p_A(R)(B) & \to & F(B) \\ \alpha & \mapsto & F(\alpha)(x). \end{array}$$

On peut vérifier que les correspondances définies plus haut sont l'inverse l'une de l'autre, c'est-à-dire, on a une bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fct}}(\mathbb{S}p_A(R), F) & \to & F(R) \\ \mathcal{F} & \mapsto & x_{\mathcal{F}}. \end{array}$$

Ce dernier résultat est une des formulations possibles du Lemme de Yoneda. Comme conséquence immédiate, on a

Corollaire 1.1 *Soient R, R' deux A-algèbres. Alors*

$$Hom_{Fct}(\mathbb{S}p_A(R), \mathbb{S}p_A(R')) \cong Hom_A(R', R).$$

On dénote $\mathbb{A}^1 : A\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{E}ns$ le foncteur oubli, qui est représenté par $A[X]$. Alors, on dispose des bijections

$$\mathrm{Hom_{Fct}}(\mathbb{S}p_A(R), \mathbb{A}^1) \cong \mathrm{Hom_A}(A[X], R) \cong R;$$

Explicitement, si l'on prend $f \in R$, le morphisme naturel $\mathcal{F}_f$ est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{S}p_A(R)(B) & \to & \mathbb{A}^1(B) \\ \alpha & \mapsto & \alpha(f). \end{array}$$

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique. On a un isomorphisme naturel $\mathbb{S}p_A(R) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}$ où la A-algèbre R est déterminée de façon unique via le lemme de Yoneda : si R' est un autre représentant de $\mathbb{G}$, alors R et R' sont isomorphes via l'unique morphisme $R' \to R$ obtenu via la correspondance de Yoneda à partir de $\mathbb{S}p_A(R) \to \mathbb{G} \to \mathbb{S}p_A(R')$. On note $A[\mathbb{G}]$ le représentant.

Exemple 1.7 On a vu que $A[\mathbb{GL}_n] \cong A[X_{1,1}, \ldots, X_{nn}, (\det(X_{i,j})_{i,j})^{-1}]$. Via les identifications $\mathbb{GL}_n \cong \mathbb{S}p_A(A[X_{1,1}, \ldots, X_{nn}, (\det(X_{i,j})_{i,j})^{-1}])$ on déduit que $X_{l,m} \in A[\mathbb{GL}_n]$ correspond à la transformation naturelle qui associe à une matrice $(a_{i,j}) \in \mathbb{GL}_n(B)$ l'élément $a_{l,m} \in B$.
Si $\mathbb{G} = \mathbb{G}_a$, alors $X \in A[\mathbb{G}_a]$ définit la transformation naturelle donnée par l'identité $B = B$. Si $\mathbb{G} = \mathbb{G}_m$ on obtient en revanche $B^\times \hookrightarrow B$.

Soit $0 \neq f \in A[\mathbb{G}]$. Alors il existe une A-algèbre B et un morphisme $g \in \mathbb{S}p_A(R)(B)$ tel que $g(f) \neq 0_B$. Pour le voir, on prend l'idéal $I \trianglelefteq R$ défini comme l'intersection des noyaux $\ker(R \xrightarrow{g} B)$ pour $B \in A\text{-}\mathscr{A}lg$, $g \in \mathrm{Hom_A}(R, B)$. Alors, on a un isomorphisme naturel $\mathbb{S}p_A(R/I) \cong \mathbb{S}p_A(R)$ donné par la projection $R \twoheadrightarrow R/I$, ce qui montre que la projection même est un isomorphisme, i.e. $I = 0$.

Produit de groupes algébriques. Soient $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ deux groupes algébriques. On définit un A-foncteur $\mathbb{G} \times \mathbb{H} : A\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{G}p$ de la façon évidente. En fait, on obtient un groupe algébrique : ce n'est rien d'autre que la propriété universelle du produit tensoriel qui donne un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom_A}(A[\mathbb{G}], \cdot) \times \mathrm{Hom_A}(A[\mathbb{H}], \cdot) \cong \mathrm{Hom_A}(A[\mathbb{G}] \otimes_A A[\mathbb{H}], \cdot)$. En résumant, on a :

$$A[\mathbb{G} \times \mathbb{H}] \cong A[\mathbb{G}] \otimes_A A[\mathbb{H}].$$

Extension des scalaires. Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique sur k et soit K/k une extension de corps. On définit un K-groupe $\mathbb{G}_K : K\text{-}\mathscr{A}lg \to \mathscr{G}p$, en composant le foncteur $\mathbb{G}$ avec le foncteur d'inclusion $K\text{-}\mathscr{A}lg \xrightarrow{\iota} k\text{-}\mathscr{A}lg$, défini par le choix d'un plongement $k \hookrightarrow K$ (grossièrement dit, toute K-algèbre R peut être considérée comme une k-algèbre, en composant le morphisme structural $K \hookrightarrow R$ avec le plongement choisi).

On voit aussitôt que le nouveau foncteur $\mathbb{G}_K$ est alors représenté par $k[\mathbb{G}_K] = k[\mathbb{G}] \otimes_k K$. En effet, dès que l'on fixe un plongement $k \hookrightarrow K$ on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_K(K \otimes_k k[\mathbb{G}], \bullet) \cong \mathrm{Hom}_k(k[\mathbb{G}], \bullet)$$

d'après les propriétés du produit tensoriel.

1.3 Groupes Algébriques et bialgèbres

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique sur k ; on a déjà vu que $k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}]$ est un représentant de $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, et k est un représentant du foncteur $R \mapsto \{1\}$ (exemple 1.4).
Or, les morphismes naturels

$$m : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G} \quad i : \{1\} \to \mathbb{G} \quad inv : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$$

(c'est-à-dire, multiplication, identité et inverse) définissent, via le lemme de Yoneda, des morphismes de k-algèbres,

$$\Delta_{k[\mathbb{G}]} : k[\mathbb{G}] \to k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \quad \epsilon_{k[\mathbb{G}]} : k[\mathbb{G}] \to k \quad S_{k[\mathbb{G}]} : k[\mathbb{G}] \to k[\mathbb{G}]$$

qui seront notés simplement par Δ, ϵ, S, s'il n'y a pas d'ambiguïtés. Ces morphismes décrivent explicitement le comportement de la structure de groupe de $\mathbb{G}$. En effet, soit $f \in k[\mathbb{G}]$, $x, y \in \mathbb{G}(R)$. Alors $x \cdot y(f) = (x \otimes_k y) \circ \Delta(f)$, d'après le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}(R) \times \mathbb{G}(R) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{G}(R) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}], R) \arrow[r, "-\circ\Delta"] & \mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}], R).
\end{tikzcd}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{G}(R)}(f) &= * \circ \epsilon(f), \\ x^{-1}(f) &= x \circ S(f), \end{aligned}$$

où $*$ est le morphisme structural $k \to R$.

Exemple 1.8 Considérons le groupe additif $\mathbb{G}_a$. Le morphisme Δ est défini par l'image $\Delta(X) \in k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \cong k[X] \otimes_k k[X]$. Or, l'identité id $\in (\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)(k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}])$ correspond au couple $(X \otimes 1, 1 \otimes X)$. Il suit donc que

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \epsilon(X) &= 0 \\ S(X) &= -X \end{aligned}$$

Exemple 1.9 Avec les mêmes arguments que dans l'exemple (1.8), on déduit les morphismes Δ, ϵ, S pour les groupes $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}\mathrm{L}_n$.
Pour $\mathbb{G}_m$ on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= X \otimes X; \\ \epsilon(X) &= 1; \\ S(X) &= X^{-1}. \end{aligned}$$

Pour $\mathbb{G}\mathrm{L}_n$ on obtient

$$\begin{aligned} \Delta(X_{ij}) &= \sum_l X_{i,l} \otimes X_{l,j}; \\ \epsilon(X_{i,j}) &= \delta_{i,j}; \end{aligned}$$

et le morphisme S est lié à la "règle de Cramer" : $S(X_{i,j})$ est le (i,j)-ième coefficient de la matrice des cofacteurs de $(X_{i,j})$.

C'est une question purement formelle de vérifier que les morphismes

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \times \mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[d, "m \times id"] \\ \mathbb{G} \times \mathbb{G} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \\ k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[u, "\Delta \times id_{k[\mathbb{G}]}"] \end{tikzcd}$$

se correspondent via Yoneda. Il suit donc que :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \times \mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[r, "id \times m"] \arrow[d, "m \times id"'] & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[d, "m"] \\ \mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[r, "m"] & \mathbb{G} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] & k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[l, "id \otimes \Delta"'] \\ k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[u, "\Delta \otimes id"] & k[\mathbb{G}] \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \quad (1.1)$$

se correspondent via Yoneda : la commutativité de l'une implique la commutativité de l'autre.

Avec le même argument, on a des correspondances :

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \times \mathbb{G} \cong \mathbb{G} \times \{1\} \arrow[r, "id\times i"] \arrow[d, "i\times id"'] \arrow[dr, "\sim"] & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[r, "m"] & \mathbb{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \otimes_k k[\mathbb{G}] \cong k[\mathbb{G}] \otimes_k k & k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[l, "id\otimes\epsilon"'] \\
k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[u, "\epsilon\otimes id"] & k[\mathbb{G}] \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\sim"]
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, "(inv{,}id)", "(id{,}inv)"'] \arrow[d] & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \arrow[d, "m"] \\
\{1\} \arrow[r, "i"] & \mathbb{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[\mathbb{G}] & k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[l, "id\otimes S"', "S\otimes id"] \\
k \arrow[u] & k[\mathbb{G}]; \arrow[l, "\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

la commutativité d'un diagramme est équivalente à la commutativité du diagramme correspondant via Yoneda.
On s'intéresse donc au procédé inverse, en introduisant la définition de *bialgèbres.*
Une bialgèbre (ou *algèbre de Hopf*) est la donnée d'une k-algèbre (de type fini) R, muni de morphismes

$$\begin{aligned}
\Delta : R &\rightarrow R \otimes_k R \\
\epsilon : R &\rightarrow k \\
S : R &\rightarrow R
\end{aligned}$$

(dits respectivement, le coproduit, la counité et le coinverse) qui vérifient des conditions de commutativité décrites par les diagrammes (1.1), (1.2), (1.3).
Si R_1, R_2 sont deux k-bialgèbres, on dit que $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ est un morphisme (de bialgèbres) si ϕ est un morphisme de k-algèbres tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[r, "\Delta_1"] \arrow[d, "\phi"] & R_1 \otimes_k R_1 \arrow[d, "\phi\otimes\phi"] \\
R_2 \arrow[r, "\Delta_2"] & R_2 \otimes_k R_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "\phi"'] & k \\
R_2 \arrow[ur, "\epsilon_2"'] &
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Le résultat que l'on obtient est alors le suivant :

Théorème 1.1 *On a une anti-équivalence entre la catégorie des groupes algébriques et celle des bialgèbres.*

Preuve : On vérifie formellement que $\mathbb{G} \mapsto k[\mathbb{G}]$ définit un foncteur contravariant entre les deux catégories (pour le vérifier, si $\mathbb{G}_1 \overset{\theta_1}{\rightarrow} \mathbb{G}_2 \overset{\theta_2}{\rightarrow} \mathbb{G}_3$, on peut considérer :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}_2], k[\mathbb{G}_2]) \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d] & \mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}_3], k[\mathbb{G}_2]) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}_2], k[\mathbb{G}_1]) \arrow[r, "\theta_2"] & \mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}_3], k[\mathbb{G}_1])
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont données par la composition avec $k[\mathbb{G}_2] \to k[\mathbb{G}_1]$, le morphisme θ_i par $\theta_i(id_{k[\mathbb{G}_i]}))$.
Le foncteur est alors pleinement fidèle, par Yoneda. Il est de plus essentiellement surjectif, dès que, si R est une bialgèbre, $\mathrm{Hom_k}(R, \cdot)$ est un groupe algébrique (d'après les propriétés du coproduit, counité et coinverse, et la discussion sur les diagrammes commutatifs plus haut). $\sharp$

Chapitre 2

Quelques rudiments sur les représentations

On introduit dans le présent chapitre la notion de *représentation* d'un groupe algébrique. On utilise l'approche "classique" des ouvrages de Jantzen [11] et Milne [13] avec la notion de comodule (paragraphe §2.1 et 2.2). Dans la paragraphe §2.1.1 on a reliée les notions classique et schématique de représentations. Le paragraphe 2.3, issue de [18], est consacré aux notions élémentaires concernants l'espace des coefficients d'une représentation et au théorème de Burnside, et c'est indépendant du reste du traité.
Enfin, dans les paragraphes §2.4 et 2.5, on donne les notions et quelques résultats élémentaires concernants les *caractères* d'une représentation et le foncteur des points fixes.

2.1 Définitions et exemples

Soit k un corps et M un k-module de type fini (en fait, une grande partie du contenu de cet paragraphe est valable si on substitue k avec un anneau A). Considerons les foncteurs

$$\mathbb{M}_a : \quad k\text{-}\mathscr{A}lg \longrightarrow \mathscr{G}p \qquad\qquad \mathbb{GL}(\mathbb{M}) : \quad k\text{-}\mathscr{A}lg \longrightarrow \mathscr{G}p$$

$$B \longmapsto M \otimes_k B \qquad\qquad B \longmapsto \mathrm{Aut}_B(M \otimes_k B).$$

Ces foncteurs sont des k-groupes algébriques. En effet, le foncteur $\mathbb{GL}(\mathbb{M})$ est isomorphe, via le choix d'une k-base de M, à $\mathbb{GL}_n$ (si $n \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k(M)$).
La description d'un représentant de $\mathbb{M}_a$ est plus intéressant. Considérons le

foncteur

$$\begin{array}{rcl}\mathfrak{D}_a(M) : k\text{-}\mathscr{A}lg & \to & \mathscr{G}p \\ R & \mapsto & \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(M, R);\end{array}$$

d'après la propriété universelle de l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}(M)$ (cf. [12], ch.XVI, §8), on voit aussitôt que

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(M, R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(M), R)$$

(isomorphisme R-linéaire, et fonctoriel en R). De plus, on a

$$M \otimes R \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-lin}}(M^*, R)$$

(isomorphisme R-linéaire, et fonctoriel en R) ce qui permet de conclure que

$$\mathbb{M}_a \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(M^*), \bullet).$$

Par exemple, si l'on prend $M = k$, on voit que $\mathbb{M}_a \cong \mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}L(\mathbb{M}) \cong \mathbb{G}_m$.

Une *représentation (linéaire)* de $\mathbb{G}$ sur M est un morphisme de k-foncteurs :

$$\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{G}\mathrm{L}(\mathbb{M});$$

De façon équivalente, pour toute k-algèbre R on se donne une action R-linéaire

$$\mathbb{G}(R) \times M \otimes_k R \to M \otimes_k R$$

telle que, si $R \xrightarrow{\phi} S$ est un k-morphisme, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}(R) \arrow[d] & \times & M \otimes_k R \arrow[r] \arrow[d, "id_M \otimes \phi"] & M \otimes_k R \arrow[d, "id_M \otimes \phi"] \\
\mathbb{G}(S) & \times & M \otimes_k S \arrow[r] & M \otimes_k S
\end{tikzcd}$$

est commutatif.
Si M, N sont deux représentations de $\mathbb{G}$, un *morphisme* de représentations de M vers N est un morphisme de k-module $M \to N$ tel que

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{G}L(\mathbb{M}) \arrow[d] \\
& \mathbb{G}L(\mathbb{N})
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. En particulier les k-représentations de $\mathbb{G}$ forment une catégorie. Étant donné une représentation ρ de $\mathbb{G}$, l'élément $\rho_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})$ prend un rôle privilégié. En effet, si $g \in \mathbb{G}(B) \cong \mathrm{Hom_k}(k[\mathbb{G}], B)$, et $m \in M$, alors on considère

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}(k[\mathbb{G}]) \arrow[d] & \times & M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[r] \arrow[d, "id_M \otimes g"] & M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[d, "id_M \otimes g"] \\
\mathbb{G}(B) & \times & M \otimes_k B \arrow[r] & M \otimes_k B.
\end{tikzcd}$$

Donc, si l'on pose :

$$\Delta_M : M \to M \otimes_k k[\mathbb{G}] \overset{\rho_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})}{\longrightarrow} M \otimes_k k[\mathbb{G}],$$

on a

$$\Delta_M(m) = \sum_i m_i \otimes f_i,$$

et il suit que l'action de g sur $m \otimes 1_B$ est :

$$g \cdot (m \otimes 1_B) = \sum_i m_i \otimes g(f_i). \tag{2.1}$$

Une façon plus élégante (et plus précise) de montrer comme Δ_M permet de reconstruire le morphisme naturelle ρ (en tant que morphisme entre foncteurs *définis dans la catégorie des ensembles* !) utilise l'adjonction des extension/restriction des scalaires.
On rappelle que, étant données $R \to S$ un morphisme d'anneaux, M, N des R, S modules respectivement, alors le morphisme $M \to M \otimes_R S$ donne un isomorphisme (en fait fonctoriel en M, N) :

$$\mathrm{Hom_R}(M, N) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hom_S}(M \otimes_R S, N)$$

Donc, $\rho_B(g) : M \otimes_k B \to M \otimes_k B$ est le seul morphisme B-linéaire tel que

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d] & M \otimes_k B \arrow[d, "id_M \otimes g"] \\
M \otimes_k B \arrow[r, "\exists!", "\rho_B(g)"'] & M \otimes_k B
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.
Le problème est que sans conditions supplémentaires la transformation naturelle ainsi obtenue par Δ_M, ne permet pas de reconstruire une représentation de $\mathbb{G}$.
Plus précisément, étant donnée une k-algèbre de Hopf (A, Δ, ϵ, S) un k*-comodule* est la donnée d'un k-module M et d'un morphisme k-linéaire $\Delta_M : M \to M \otimes_k A$ tel que

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d] & M \otimes_k A \arrow[d, "id_M \otimes \epsilon"] \\
M \otimes_k k \arrow[r, equal] & M \otimes_k k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\Delta_M"] & M \otimes_k A \arrow[d, "id_V \otimes \Delta"] \\
M \otimes_k A \arrow[r, "\Delta_M \otimes id_A"] & M \otimes_k A \otimes_k A
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

soient commutatifs. Un morphisme de comodules M, N est un morphisme k-linéaire $M \xrightarrow{\phi} N$ compatible avec les morphismes Δ_M, Δ_N, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$\Delta_N \circ \phi = (\phi \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta_M.$$

Théorème 2.1 *Soit $\mathbb{G}$ un k-groupe. Alors, on dispose d'une équivalence entre la catégorie des $\mathbb{G}$-représentations et celle des $k[\mathbb{G}]$-comodules.*

Preuve : Fixons un k-module M. On a vu plus haut que se donner un morphisme naturelle (oublions pour l'instant les conditions sur les structures de groupes) $\mathbb{G} \to \mathbb{G}L(\mathbb{M})$ est la même chose que se donner un morphisme k-linéaire $\Delta_M : M \to M \otimes_k k[\mathbb{G}]$. On doit donc vérifier que les conditions (2.2) sont équivalentes au fait que le morphisme naturel soit un morphisme de groupes algébriques.
i) $\rho(1_{\mathbb{G}(R)}) = \mathrm{id}_{M \otimes R}$ pour toute k-algèbre R est équivalent à la commutativité du premier diagramme dans (2.2).
En effet, $\epsilon = 1_{\mathbb{G}(k)}$. Donc, si l'on part avec une représentation ρ, on obtient :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d] & M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"] \\
M \otimes_k k \arrow[r, "\exists!", "\rho_k(\epsilon)=\mathrm{id}"'] & M \otimes_k k.
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, on rappelle que, par construction, $1_{\mathbb{G}(R)} = (k[\mathbb{G}] \xrightarrow{\epsilon} k \to R)$. Ensuite, on utilise :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d] & M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[d, "id_M\otimes\epsilon"'] \arrow[dd, bend left, "id\otimes 1"] \\
M \otimes_k k \arrow[r, "id"] \arrow[d] & M \otimes_k k \arrow[d] \\
M \otimes_k R \arrow[r, "\exists!", "\rho_R(1_{\mathbb{G}(R)})"'] & M \otimes_k R.
\end{tikzcd}$$

ii) L'équivalence entre la condition $\rho_R(g \cdot h) = \rho_R(g) \circ \rho_R(h)$ et le deuxième diagramme dans 2.2 est aussi formelle, et similaire.
Il ne reste plus qu'à observer comment on passe d'un morphisme de $\mathbb{G}$-représentations

à un morphisme de comodules. Ces deux notions sont les mêmes : la condition pour qu'un morphisme k-linéaire $\phi : M \to N$ soit un morphisme de $\mathbb{G}$ représentation implique la condition de compatibilité sur les $k[\mathbb{G}]$-comodules correspondants, et réciproquement.
Tout se déduit de l'étude du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[rr, "\Delta_M"] \arrow[dl] \arrow[dd, "\phi"] & & M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[dl, "id_M \otimes g"'] \arrow[dd, "\phi\otimes id"] \\
M \otimes_k R \arrow[rr, "\rho_R(g)"] \arrow[dd, "\phi\otimes id"] & & M \otimes_k R \arrow[dd, "\phi\otimes id"] & \\
 & N \arrow[rr, "\Delta_N"] \arrow[dl] & & N \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[dl, "id_M \otimes g"'] \\
N \otimes_k R \arrow[rr, "\rho'_R(g)"] & & N \otimes_k R &
\end{tikzcd}$$

où R est une k-algèbre et $g \in \mathbb{G}$. Dans le diagramme, toutes les faces sont commutatives, sauf la face "avant" (dont la commutativité signifie que ϕ est un morphisme de représentations) et la face "arrière" (dont la commutativité signifie que ϕ est un morphisme de comodules) ; la conclusion est évidente. $\sharp$

Exemple 2.1 Si A est une k-bialgèbre, alors le k-module $M \stackrel{\text{def}}{=} A$ est lui même un comodule, avec $\Delta_M = \Delta$. La représentation correspondante de $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom_k}(A, \cdot)$ est la *représentation régulière* ; si $g \in \mathbb{G}(R)$, $x \in A$, alors

$$g \cdot (x \otimes 1) = (\mathrm{id}_A \otimes g) \circ \Delta(x).$$

Exemple 2.2 Soit $\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{G}L(\mathbb{M})$ une k-représentation, avec M un k-module de dimension finie. Si l'on fixe une base, disons $\mathscr{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i\}_{i=1}^n$, pour M, alors, il est immédiat de vérifier que l'on dispose d'un isomorphisme de groupes algébriques $\mathbb{G}L(\mathbb{M}) \cong \mathbb{G}\mathrm{L}_n$, d'où, par composition, un morphisme

$$\mathbb{G} \to \mathbb{G}\mathrm{L}_n$$

(qui, pour ne pas alourdir le notations, sera noté avec le même ρ).
Ceci définit un morphisme induit

$$\phi : k[\mathbb{G}\mathrm{L}_n] \to k[\mathbb{G}];$$

et on écrit $\Delta_M(e_j) = \sum_{i=0}^n e_i \otimes a_{i,j}$, avec $a_{i,j} \in k[\mathbb{G}]$. Les coefficients de $\rho_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) \in \mathbb{G}\mathrm{L}_n(k[\mathbb{G}])$ donnent l'image de $X_{i,j} \in k[\mathbb{G}\mathrm{L}_n]$ via ϕ. Mais on a $\rho_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})(e_j \otimes 1) = \sum_{i=0}^n e_i \otimes a_{i,j}$; donc

$$\rho_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) = ((a_{i,j})_{i,j}).$$

$\mathbb{G}$-représentations, comodules et extensions des scalaires. Soit M un k-module, muni d'une action ρ d'un groupe algébrique $\mathbb{G}$. Pour une extension de corps K/k, on définit une action de $\mathbb{G}_K$ sur M_K : si B est une K-algèbre, on a $\mathrm{Hom}_K(K[\mathbb{G}_K], B) \cong \mathrm{Hom}_k(k[\mathbb{G}], B)$ et $M \otimes_k B = M \otimes_K B$; on notera ρ_K cette nouvelle action.

Pour connaître la structure de comodule associée à ρ_K, on est donc ramené à étudier l'action du morphisme canonique $(k[\mathbb{G}] \xrightarrow{\iota_1} k[\mathbb{G}] \otimes K) \in \mathbb{G}(K[\mathbb{G}_K])$ sur $M \otimes K[\mathbb{G}_K]$. Mais, comme on l'a déjà vu, cette action est définie comme l'unique morphisme $K[\mathbb{G}_K]$-linéaire $M \otimes K[\mathbb{G}_K] \to M \otimes K[\mathbb{G}_K]$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[r, "\rho(\mathrm{id})"] \arrow[d, "id_M \otimes \iota_1"] & M \otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[d, "id_M \otimes \iota_1"] \\ M \otimes_k K[\mathbb{G}_K] \arrow[r] & M \otimes_k K[\mathbb{G}_K]. \end{tikzcd}$$

soit commutatif. En d'autres termes, cette action est obtenue à partir de $\rho(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})$ par extensions des scalaires, et on voit facilement que le morphisme Δ_{M_K} : $M_K \to M_K \otimes K[\mathbb{G}_K]$ est obtenu à partir de $\Delta_M : M \to M \otimes k[\mathbb{G}]$ par extensions des scalaires.

2.1.1 Vers une théorie plus générale.

Rappelons le contexte de base que l'on trouve dans l'ouvrage de Mumford concernant la théorie géométrique des invariants (cf. [14]). Soit G un k-schéma en groupes, μ, inv, e les morphismes structuraux, et fixons un k-schéma X.

Définition 2.1 *Une action de G sur X est la donnée d'un morphisme de k-schémas $\sigma : G \times_k X \to X$ tel que*

$$\begin{tikzcd} G \times_k G \times_k X \arrow[r, "\mu \times_k \mathrm{id}_X"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times_k \sigma"] & G \times_k X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times_k X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \times_k X \arrow[r, "e \times_k \mathrm{id}_X"] & G \times_k X \arrow[d, "\sigma"] \\ X \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

On voit alors que la définition de représentation linéaire donné à pag. 12 n'est rien d'autre qu'un cas particulier. En fait, dans notre situation, $X \cong \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(M^*))$, $G = \mathrm{Spec}(k[\mathbb{G}])$ est un schéma affine, et se donner un morphisme $\sigma : G \times_k \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(M^*)) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(M^*))$ est équivalent à se donner un morphisme entre les “foncteurs des points”. Or, si R est une k-algèbre, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(k[\mathbb{G}]\otimes_k \mathrm{Sym}(M^*),R) \arrow[r, "-\circ\sigma^*"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{Sym}(M^*),R) \arrow[d, "\wr"] \\
G(R)\times M\otimes_k R \arrow[r, dotted, "\rho_R"] & M\otimes_k R
\end{tikzcd}$$

fonctoriellement en R, et les $G(R)$-sections de la flèche induite ρ_R sont R-linéaires.
On voit aussitôt que les conditions de la définition 2.1 se traduisent en une action de groupe naïve $G(R)\times M\otimes_k R\to M\otimes_k R$. On pourra donc utiliser les résultats de la théorie géométrique des invariants, exposée dans [14], pour étudier les représentations linéaires.

2.2 Sous-représentations

Soit $\rho:\mathbb{G}\to\mathbb{G}L(\mathbb{M})$ une représentation. Une *sous $\mathbb{G}$-représentation de M* est la donnée d'un k-sous module N de M, et d'une représentation $\rho':\mathbb{G}\to\mathbb{G}L(\mathbb{N})$ tel que l'inclusion $N\hookrightarrow M$ soit un morphisme de représentations.
Via l'équivalence vue dans le théorème (2.1), on définit un sous-$k[\mathbb{G}]$-comodule de M comme un comodule N tel que l'on ait $N\hookrightarrow M$ et tel que l'inclusion soit un morphisme de comodule ; en d'autres termes, tel que

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Delta_M"] & M\otimes_k k[\mathbb{G}] \\
N \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Delta_N"] & N\otimes_k k[\mathbb{G}] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.
Dès que toute k-algèbre est plate sur k, on déduit que si $(N_i)_i$ est une famille de sous-représentations de M, alors l'intersection $\bigcap_i N_i$ est munie d'une structure évidente de sous-représentation de M.
Si $m\in M$ on définit $k[\mathbb{G}]\cdot m$, la sous-représentation de M obtenue comme l'intersection de toutes les sous-représentations N de M avec $m\in N$. On dit que $k[\mathbb{G}]\cdot m$ est le $k[\mathbb{G}]$-comodule cyclique engendré par m. De manière analogue, si $L\leq M$ est un sous k-espace vectoriel de M, on définit la sous-$\mathbb{G}$-représentation engendrée par L.

Définition 2.2 *On dit que M est une représentation irréductible de $\mathbb{G}$ (ou bien que M est un $k[\mathbb{G}]$ comodule simple) si pour tout $m\in M$, $m\neq 0$, on a $k[\mathbb{G}]\cdot m=M$. Ceci est équivalent à dire que M n'a pas de sous-$\mathbb{G}$-représentations non triviaux.*

Proposition 2.1 *Soit $m_0 \in M$ et on écrit $\Delta_M(m_0) = \sum_{i=1}^{s} m_i \otimes f_i$ (où $m_i \in M$, $f_i \in k[\mathbb{G}]$). Alors, on a une inclusion de k-modules $k[\mathbb{G}]m_0 \hookrightarrow \langle m_1, \ldots, m_s \rangle_k$.*

Preuve : Soit $V \stackrel{\text{def}}{=} \langle m_1, \ldots, m_s \rangle_k$ et N le sous k-module de M defini par

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \,\text{tel que}\, \Delta_M(m) \in V \otimes_k k[\mathbb{G}]\}.$$

Comme $m_0 \in N$ il suffit de montrer que N est un sous-*comodule* de M, et, donc il suffit de montrer que

$$\Delta_M(N) \subseteq N \otimes_k k[\mathbb{G}]. \tag{2.3}$$

Pour cela, notons d'abord que la platitude de $k[\mathbb{G}]$ sur k entraîne :

$$\begin{aligned}(\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})^{\leftarrow}(V \otimes_k k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}]) \quad \overset{\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}}{\underset{\sim}{\rightarrow}} \quad & (\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}(M \otimes k[\mathbb{G}])) \cap V \otimes k[\mathbb{G}] \otimes k[\mathbb{G}] = \\ & = (\Delta_M(M) \cap V \otimes k[\mathbb{G}]) \otimes k[\mathbb{G}] = \\ & = N \otimes k[\mathbb{G}].\end{aligned}$$

Or, comme le morphisme Δ_M est trivialement injectif (d'après le premier diagramme dans 2.2), $\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}$ l'est aussi, et l'inclusion (2.3) est donc équivalente à

$$(\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})\Delta_M(N) \subseteq V \otimes_k k[\mathbb{G}] \otimes_k k[\mathbb{G}];$$

ce qui l'on vérifie immédiatement à l'aide des propriétés du morphisme Δ_M, à savoir :

$$(\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})\Delta_M(N) = id_M \otimes \Delta_{k[\mathbb{G}]}(\Delta_M(N)) \subseteq id_M \otimes \Delta_{k[\mathbb{G}]}(V \otimes_k k[\mathbb{G}]).$$

$\sharp$

Remarque 2.1 On peut généraliser la proposition 2.1 de la façon suivante : si $L \leq M$ est un sous k-espace vectoriel de M, engendré par $n_1, \ldots, n_r \in N$, et si l'on écrit $\Delta_M(n_i) = \sum_j m_{ij} \otimes f_{ij}$, alors on a

$$k[\mathbb{G}] \cdot L \leq \langle m_{ij}\, i, j \in \mathbb{N} \rangle_k.$$

Corollaire 2.1 *Avec les hypothèses de la proposition* 2.1*, supposons que les $m_i \in M$ et les $f_i \in k[\mathbb{G}]$ soient linéairement indépendants sur k (en fait, cette hypothèse est toujours satisfaite, quitte à remplacer les m_i et les f_i avec des sommes convenables). Alors, les $m_i \in M$ forment une k-base pour $k[\mathbb{G}]m$ (qui est donc un k-module de dimension* finie*).*

Preuve : Soit $\mathscr{V} \stackrel{\text{def}}{=} (v_i)_{i=1}^r$ une k-base pour $k[\mathbb{G}]m$; d'après la proposition 2.1 il suffit donc de montrer que $r \geq s$.
On écrit $v_j = \sum_{j=0}^s a_{i,j} \cdot m_i$ avec $a_{i,j} \in k$ (et l'écriture n'est pas unique, *a priori*) ; de plus, on a $\Delta_M(m_0) = \sum_{j=0}^r v_j \otimes \alpha_j$ avec $\alpha_j \in k[\mathbb{G}]$. Mais,

$$\sum_{i=1}^s m_i \otimes f_i = \Delta_M(m_0) = \sum_{j=0}^r v_j \otimes \alpha_j = \sum_{i,j} m_i \otimes a_{i,j}\alpha_j;$$

comme les m_i sont indépendants sur k, on a $f_i = \sum_j a_{i,j}\alpha_j$, ce qui donne

$$\langle f_1, \cdots, f_s \rangle_k \subseteq \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_r \rangle_k.$$

D'où la conclusion, dès que les f_i sont linéairement indépendants sur k $\sharp$

Corollaire 2.2 *i) Si M est une représentation irréductible de $\mathbb{G}$, alors $\dim_k M$ est fini.*

ii) Soit $\mathscr{B} = (m_i)_{i=1}^r$ une k-base de la représentation M. Alors la $\mathbb{G}$-représentation M est simple ssi pour tout $m \in M$, $m \neq 0$ les $f_i \in k[\mathbb{G}]$ qui apparaissent dans l'écriture $\Delta_M(m) = \sum_{i=1}^r m_i \otimes f_i$ sont linéairement indépendants sur k.

Preuve : (i) Il s'agit de prendre $m \in M$, non nul (si $M = 0$ il n'y a rien à prouver), et appliquer le corollaire 2.2 à $k[\mathbb{G}] \cdot m = M$
(ii) La suffisance est évidente, d'après le corollaire 2.2.
Supposons $m \in M$, non nul, tel que les f_i soient dépendants sur k ; pour fixer les idées, supposons $f_1 = \sum_{i=2}^r \alpha_i f_i$ avec $\alpha_i \in k$. Écrivons $\Delta_M(m) = \sum_{i=2}^r m_i - \alpha_i \cdot m_1$ et on a (d'après la proposition 2.1) $k[\mathbb{G}] \cdot m \subseteq \langle m_2 - \alpha_2 \cdot m_1, \ldots, m_r - \alpha_r \cdot m_1 \rangle_k$.
Et ceci n'est pas M tout entier, car, par exemple :

$$m_1 \notin \langle m_2 - \alpha_2 \cdot m_1, \ldots, m_r - \alpha_r \cdot m_1 \rangle_k.$$

$\sharp$

On conclut avec la notion de *socle*. Si M est un $k[\mathbb{G}]$ comodule, on dit que M est *semisimple* si on peut l'écrire $M = \bigoplus_i N_i$ où les N_i sont des sous-$k[\mathbb{G}]$-comodules simples convenables. Le résultat remarquable est que tout $k[\mathbb{G}]$-module M admet une sous-représentation semisimple non nulle maximale, appelée le socle.
Pour le voir, on écrit $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i N_i$ où $(N_i)_i$ est la famille de tous les sous-$k[\mathbb{G}]$-comodules simples de M ; on note que la somme est en fait directe (si $0 \neq x \in N_i$, alors $k[\mathbb{G}]x = N_i$). On définit un morphisme $\Delta_S : S \to S \otimes_k k[\mathbb{G}]$ via

$$\Delta_S \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_i \Delta_{N_i} : \bigoplus_i N_i \to \bigoplus_i N_i \otimes_k k[\mathbb{G}] (= S \otimes_k k[\mathbb{G}]).$$

On vérifie tout de suite que Δ_S munit S d'une structure de $k[\mathbb{G}]$-comodule, et que S est un sous-$k[\mathbb{G}]$-comodule de M.

2.3 Coefficients et le théorème de Burnside

Considérons la situation suivante : $\mathbb{G} = \mathrm{Hom}_k(k[\mathbb{G}], \bullet)$ un k-groupe algébrique, $H \leq \mathbb{G}(k)$ un sous-groupe des k-points de $\mathbb{G}$, M un k-module de dimension finie, muni d'une action de $\mathbb{G}$.

Si l'on fixe une k-base $\mathscr{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{m_1, \dots, m_l\}$ de M, on pourra s'intéresser à

$$\rho_{\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}}(m_i \otimes 1) = \sum_{j=1}^{l} m_j \otimes f_{ij}$$

avec $f_{ij} \in k[\mathbb{G}]$, qui ne dépend que du choix de la base $\mathscr{B}$ de M. On peut donc définir l'*espace des coefficients* par

$$\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f_{ij},\, 1 \leq i, j, \leq l \rangle_k;$$

notons que s'agit d'un k-sous-espace vectoriel de $k[\mathbb{G}]$ *bien défini*, dès que $\langle f_{ij},\, 1 \leq i, j, \leq l \rangle_k$ ne dépend pas de la base choisie pour déterminer les coefficients f_{ij}.

Exemple 2.3 Considérons l'action évidente de $\mathbb{G} = \mathbb{G}_m = \mathrm{Hom}_k(k[X, X^{-1}], \bullet)$ sur M. Alors,

$$\rho_{\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}}(m_i \otimes 1) = m_i \otimes X$$

et $\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) = k[X]_1^h$ [1].

Exemple 2.4 Considérons l'action naturelle de $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_l$ sur M. Alors,

$$\rho_{\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}}(m_i \otimes 1) = \sum_{j=1}^{l} m_j \otimes X_{ij}$$

ce qui montre que $\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) = \{\sum_{i,j} \lambda_{ij} X_{ij} \text{ avec } \lambda_{ij} \in k\}$.

Les coefficients de la H-représentation M, par rapport à la base $\mathscr{B} = \{m_i\}_i$, sont les fonctions $g_{ij} : H \to k$ définies par la condition

$$h \cdot m_i = \sum_{j=1}^{l} m_j \cdot g_{ij}(h)$$

pour tout $h \in H$ (cette condition déterminé les g_{ij} de façon unique, étant fixé la base $\mathscr{B}$). On pose donc

$$\mathrm{Coeff}_H(M) \stackrel{\text{def}}{=} \langle g_{ij},\, 1 \leq i, j, \leq l \rangle_k,$$

[1] en général, on désigne $k[X]_n^h$ le sous k-module de $k[X]$ donné par les polynômes homogènes de degré n.

le sous k-espace vectoriel de k^H engendré par les g_{ij} ; comme précédemment, l'espace ainsi défini ne dépend pas de la choix de la base $\mathscr{B}$.

Il est facile de voir que l'on peut définir un morphisme k-linéaire

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) & \to & \mathrm{Coeff}_H(M) \\ f_{ij} & \mapsto & ev_{f_{ij}}\end{array}$$

où $ev_{f_{ij}}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(f_{ij})$ pour tout $\phi \in H$. Clairement, les $ev_{f_{ij}}$ sont les coefficients de l'action de H sur M, et, pourtant, le morphisme ainsi défini est surjectif. Par conséquent, on a les inégalités

$$(\dim_k(M))^2 \geq \dim_k(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M)) \geq \dim_k(\mathrm{Coeff}_H(M)). \tag{2.4}$$

Lemme 2.1 *Dans la situation précédente, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) pour tout $f \in \mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) \setminus \{0\}$, il existe $h \in H$ tel que $f(h) \neq 0$;

ii) le morphisme $\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) \to \mathrm{Coeff}_H(M)$ est injective ;

iii) une famille d'éléments de $\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M)$ est k-linéairement indépendante ssi son image via le morphisme précédent est une famille d'éléments k-linéairement indépendants.

Preuve : C'est trivial : *i*) signifie précisément que le noyau du morphisme $\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) \to \mathrm{Coeff}_H(M)$ est nul. L'equivalence entre *ii*) et *iii*) est un fait élémentaire d'algèbre linéaire.♯

Définition 2.3 *Avec les notations précédents, on dit que H voit les coefficients de M (sur k) si les propriétés équivalentes du lemme sont vérifiées*

2.3.1 Coefficients et extensions de scalaires.

Supposons maintenant que $\iota : k \hookrightarrow K$ soit une extension de corps. D'après la caractérisation de Δ_{M_K} vue dans §2.1, on conclut que, si f_{ij} sont les coefficients de la $\mathbb{G}$-représentation M, alors $f_{ij} \otimes 1$ sont les coefficients de la $\mathbb{G}_K$-représentation M_K. Il suit que

$$\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}_K}(M_K) \cong \mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M) \otimes_k K.$$

Considérons le sous-groupe $H \leq \mathbb{G}$. Comme on a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(k[\mathbb{G}], k) \stackrel{ssgroupe}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_k(k[\mathbb{G}], K) \cong \mathrm{Hom}_K(k[\mathbb{G}] \otimes K, K) = \mathbb{G}_K(K);$$

si on désigne H_ι le groupe H vu comme sous groupe de $\mathbb{G}_K(K)$, on pourra s'intéresser à $\mathrm{Coeff}_{H_\iota}(M_K)$. Rappelons que les coefficients de M en tant que H-représentation sont donnés par les évaluations $ev_{f_{ij}}$; ceci permet d'en déduire que les coefficients de M_K en tant que H_ι-représentations sont donnés par $\iota\circ\phi \mapsto (\iota \circ \phi) \otimes \mathrm{id}_K(f_{ij} \otimes 1_K) = \iota(\phi(f_{ij}))$ (où $\phi \in H$). Il suit alors que le morphisme évident $\mathrm{Coeff}_H(M)\otimes K \to \mathrm{Coeff}_{H_\iota}(M_K)$ est surjectif, d'où $\dim_K(\mathrm{Coeff}_{H_\iota}(M_K)) \leq \dim_k(\mathrm{Coeff}_H(M))$.

Proposition 2.2 *Soit K/k une extention de corps, $\overline{k}$ la clôture algébrique de k.*

i) Si M est une $\mathbb{G}$-représentation réductible, alors M est une représentation réductible de H ;

ii) M est une représentation irréductible de $\mathbb{G}$ ssi M_K est une représentation irréductible de $\mathbb{G}_K$;

iii) si M est une représentation irréductible de $\mathbb{G}$ et si H voit les coefficients de M sur $\overline{k}$, alors M est une H-représentation absolument irréductible.

Preuve : *i*) Si M admet un sous espace $\mathbb{G}$-stable, alors M admet un sous espace $\mathbb{G}(k)$-stable.
ii) Grâce à la relation 2.1, on voit aussitôt qu'une $\mathbb{G}$-représentation de dimension finie (disons n) sur un corps k est réductible ssi il existe un entier $r \in \mathbb{N}^\times$ et une k-base tels que les coefficients relatifs $f_{ij} \in k[\mathbb{G}]$ vérifient $f_{ij} = 0$ pour $r \leq j$ et $i \leq r$ (grossièrement dit, la matrice des coefficients présente un "trou"). On peut conclure, dès que les coefficients de M_K (relatifs à la base $n_i \otimes 1$) sont $f_{ij} \otimes 1$ et $k[\mathbb{G}]$ est plat sur k.
iii) On commence par l'observer que l'on peut supposer $k = \overline{k}$, grâce à *ii*). Si l'on fixe une k-base $\mathscr{B} = \{m_1, \ldots, m_l\}$ de M, l'hypothèse de $\mathbb{G}$-irréductibilité entraîne que, pour tout $m \in M$, les $f_{m,i} \in k[\mathbb{G}]$ qui apparaissent dans l'écriture $\Delta_M(m) = \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes f_{m,i}$ sont k-linéairement indépendants (d'après le corollaire 2.2). Comme H voit les coefficients de M, on en déduit que les évaluations $ev_{f_{m,i}} : H \to k$ sont linéairement indépendantes sur k. Pour conclure, fixons une k-base $\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ de la sous-H-représentation de M engendrée par m. On a alors $h \cdot m = \sum_{j=1}^{r} v_j \phi_j(h)$, pour des $\phi \in k^H$ convenables ; de plus, $v_j = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} m_i$ avec $a_{ij} \in k$. Il suit que

$$h \cdot m = \sum_{i=1}^{l} m_i ev_{f_{m,i}}(h) = \sum_{i=1}^{l} m_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\phi_j(h)$$

ce qui montre que les $ev_{f_{m,i}}$ appartiennent à un sous k-espace linéaire de k^H de dimension au plus r, ce qui permet de conclure. $\sharp$

Considérons K/k une extension de corps. On dira que $\mathbb{G}(K)$ est *dense* dans $\mathbb{G}$ si $0 \in k[\mathbb{G}]$ est le seul élément $f \in k[\mathbb{G}]$ avec la propriété que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{G}(K)$. On a alors la

Proposition 2.3 *Soit $\overline{k}$ un corps algébriquement clos et $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réduit. Alors $\mathbb{G}(\overline{k})$ est dense dans $\mathbb{G}$.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate du Nullstellensatz de Hilbert. $\sharp$

Corollaire 2.3 *Soit M un k-module de dimension finie et $\mathbb{G}$ un k-groupe algébrique géométriquement réduit agissant sur M.*
Alors M est une représentation simple de $\mathbb{G}$ ssi $M_{\overline{k}}$ est une représentation irréductible de $\mathbb{G}(\overline{k})$.

Preuve : L'implication "$\Rightarrow$" vient de la proposition 2.2-*i*).
Réciproquement, grâce à la proposition 2.2-*ii*), $M_{\overline{k}}$ est une représentation irréductible de $\mathbb{G}_{\overline{k}}$. De plus, on utilise la proposition 2.3 pour déduire que $\mathbb{G}_{\overline{k}}(\overline{k})$ voit les coefficients de $M_{\overline{k}}$. On conclut d'après la proposition 2.2-*iii*), en notant que $\mathbb{G}(\overline{k}) = \mathbb{G}_{\overline{k}}(\overline{k})$.$\sharp$

2.3.2 Le théorème de Burnside.

Sauf des différents indications, dans ce paragraphe on considére $k = \overline{k}$ un corps algébriquement clos, M un $\overline{k}$-module de type fini, $\mathbb{G}$ un $\overline{k}$-groupe algébrique et H un groupe. On dispose du résultat classique suivante :

Théorème 2.2 (Burnside) *Soit $\rho : H \to \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M)$ une H-représentation. Alors*

$$\dim_{\overline{k}}(\mathrm{Coeff}_H(M)) \leq (\dim_{\overline{k}}(M))^2$$

avec égalité ssi la représentation est irréductible.

Preuve : Omissis (cf. [5], §27.4, théorème 27.8). $\sharp$

On va généraliser ce résultat au cas des groupes algébriques.

Théorème 2.3 *Si M est muni d'une action d'un groupe algébrique réduit $\mathbb{G}$, alors*

$$\dim_{\overline{k}}(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M)) \leq (\dim_{\overline{k}}(M))^2 \tag{2.5}$$

avec égalité ssi M est une représentation irréductible de $\mathbb{G}$.

Preuve : L'inégalité a été montrée précédemment dans ce paragraphe (cf. l'inegallité 2.4).
Supposons que M soit un $\mathbb{G}$ module irréductible. Grâce à la proposition 2.3, $\mathbb{G}(\overline{k})$ est dense dans $\mathbb{G}$, ce qui permet de conclure que $\mathbb{G}(\overline{k})$ voit les coefficients de M et donc (proposition 2.2-*ii*)) que M est une représentation irréductible de $\mathbb{G}(\overline{k})$. En utilisant les inégalités

$$(\dim_{\overline{k}}(M))^2 \geq \dim_{\overline{k}}(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M)) \geq \dim_{\overline{k}}(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}(\overline{k})}(M))$$

on conclut avec le théorème de Burnside que $\dim_{\overline{k}}(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M)) = (\dim_{\overline{k}}(M))^2$.
Réciproquement, supposons que M soit réductible. Soit $N \leq M$ un sous $\overline{k}$-espace non trivial de M, $\mathbb{G}$-stable, et $\mathscr{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{n_1, \ldots, n_r\}$ une $\overline{k}$-base de N. On complète $\mathscr{E}$ en une $\overline{k}$-base de M, disons $\mathscr{B} = \{n_1, \ldots, n_r, m_{r+1}, \ldots, m_l\}$, on a alors $f_{ij} = 0$ (les notations comme dans (2.4)) pour $i \leq r$ et $j \geq r+1$, ce qui donne l'inégalité stricte dans (2.5). $\sharp$

Grâce au théorème 2.3 et à l'étude des coefficients par extensions des scalaire, on obtient :

Proposition 2.4 *Soit M un k-module de type fini, muni de l'action d'un k-groupe géométriquement réduit $\mathbb{G}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
i) M est une représentation simple de $\mathbb{G}$;
ii) $\dim_k(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M)) = (\dim_k(M))^2$.

Preuve : D'un coté, $i)$ est équivalent à l'irréductibilité de $M_{\overline{k}}$ sous $\mathbb{G}_{\overline{k}}$ (grâce à la proposition 2.2). De l'autre, on a $\dim_{\overline{k}}(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}_{\overline{k}}}(M_{\overline{k}})) = \dim_k(\mathrm{Coeff}_{\mathbb{G}}(M))$. La conclusion suit alors du théorème 2.3. $\sharp$.

2.4 Caractères

Soit $\mathbb{G}$ un k-groupe.

Définition 2.4 *Un caractère du groupe $\mathbb{G}$ est un morphisme de k-groupes*

$$\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}_m.$$

On note $X(\mathbb{G})$ l'ensemble des caractères de $\mathbb{G}$.

Si $\lambda \in X(\mathbb{G})$, on note k_λ le k-module k, muni de l'action évidente de $\mathbb{G}$ induite par le caractère λ (à savoir, si B est une k-algèbre et $g \in \mathbb{G}(B)$, l'action de g sur B est la multiplication par $\lambda_B(g) \in B^\times$).
On s'intéresse au morphisme k-linéaire $\Delta_{k_\lambda} = \Delta_\lambda : k_\lambda \to k_\lambda \otimes_k k[\mathbb{G}] = k[\mathbb{G}]$. Ce morphisme est déterminé par $f_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_\lambda(1_k) = \lambda_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) \in k[\mathbb{G}]^\times$. De plus, si $g \in \mathbb{G}(B)$, alors $\lambda_B(g) = f_\lambda(g)$, grâce à la condition de commutativité définissant λ :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}(k[\mathbb{G}]) \arrow[r, "\lambda_{k[\mathbb{G}]}"] \arrow[d, "g\circ_"] & \mathrm{Aut}_{k[\mathbb{G}]}(k_{\lambda \otimes_k k[\mathbb{G}]}) \cong k[\mathbb{G}]^\times \arrow[d, "ev_g"] \\
\mathbb{G}(B) \arrow[r, "\lambda_B(g)"] & \mathrm{Aut}_B(k_\lambda \otimes_k B) \cong B^\times.
\end{tikzcd}$$

On conclut donc que le caractère λ s'identifie à $f_\lambda = \lambda_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) \in k[\mathbb{G}]^\times$.
Plus en détail, on a le

Lemme 2.2 *La correspondance* $\lambda \mapsto \lambda_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})$ *définit une bijection*

$$X(\mathbb{G}) \to \{f \in k[\mathbb{G}]^\times \text{ t.q. } f(1_{\mathbb{G}(k)}) = 1_k \text{ et } \Delta_{k[\mathbb{G}]}(f) = f \otimes f\}$$

Preuve : La donnée d'un caractère $\lambda \in X(\mathbb{G})$ correspond à la donnée d'un morphisme $k[T, T^{-1}] \to k[\mathbb{G}]$ de bialgèbres (grâce au théorème 1.1). Mais, la donnée d'un morphisme de k algèbres $k[T, T^{-1}] \to k[\mathbb{G}]$ revient à la donnée d'un élément $f \in k[\mathbb{G}]^\times$; de plus, en utilisant la description explicite de la structure de bialgèbre de $k[T, T^{-1}]$, on voit aussitôt que le morphisme de k-algèbres associé à $f \in k[\mathbb{G}]^\times$ respecte les structures de algèbres d'Hopf ssi on a $\Delta_{k[\mathbb{G}]}(f) = f \otimes f$ et $\epsilon_{k[\mathbb{G}]}(f) = 1_k$. $\sharp$

Notons que $X(\mathbb{G})$ a une structure évidente de groupe abelien : si $\lambda_1, \lambda_2 \in X(\mathbb{G})$, on définit $\lambda_1 + \lambda_2$ par :

$$\begin{array}{rcl} (\lambda_1 + \lambda_2)_B : \mathbb{G}(B) & \to & B^\times \\ g & \mapsto & \lambda_1(g) \cdot \lambda_2(g) \end{array}$$

(où B désigne une k-algèbre et $g \in \mathbb{G}(B)$) ; la bijection du lemme 2.2 devient alors un isomorphisme de groupes abeliens.

On rappelle que la catégorie $\mathscr{G}p$ des groupes admet les coproduits entre deux objets : si G, H sont deux groupes, leur coproduit n'est rien d'autre que le produit libre $G * H$. Il est alors bien connu que la catégorie des foncteurs $\mathscr{F}onct(k\text{-}\mathscr{A}lg, \mathscr{G}p)$ hérite des coproduits : si $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ sont deux k-groupes, alors $\mathbb{G}_1 \coprod \mathbb{G}_2$ est défini par

$$(\mathbb{G}_1 \coprod \mathbb{G}_2)(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{G}_1(B) * \mathbb{G}_2(B)$$

pour toute k-algèbre B.
Il suit des propriétés du coproduit que

$$X(\mathbb{G}_1 * \mathbb{G}_2) = X(\mathbb{G}_1) \times X(\mathbb{G}_2).$$

On va conclure cette section avec la notion d'action "par un caractère" . Prenons M un k-module muni d'une action d'un k-groupe $\mathbb{G}$; soit $\lambda \in X(\mathbb{G})$, $f_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{k[\mathbb{G}]}(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]})$. On pose donc

$$M_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \text{ t.q. } \Delta_M(m) = m \otimes f_\lambda\};$$

c'est alors immédiat de voir que

$$M_\lambda = \{m \in M \text{ t.q. } g \cdot (m \otimes 1_B) = m \otimes \lambda_B(g) \text{ pour tout } b \in k\text{-}\mathscr{A}lg,\ g \in \mathbb{G}(B)\}.$$

On dira que M_λ est le sous-espace maximal sur lequel $\mathbb{G}$ opère par le caractère λ ; si $M_\lambda = M$, on dira que $\mathbb{G}$ opère par λ sur M.

2.5 Points fixes

Soit M un k-module, muni de l'action d'un k-groupe $\mathbb{G}$. On s'intéresse au sous-espace maximal de M sur lequel l'action de $\mathbb{G}$ est triviale. À l'aide du paragraphe §2.4, on voit que cet espace est défini par $M_{triv} = \{m \in M \text{ t.q. } \Delta_M(m) = m \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}\}$, où l'on a noté $triv : \mathbb{G} \to \mathbb{G}_m$ le caractère trivial défini par $triv_B(g) = 1_B$ pour toute k-algèbre B, $g \in \mathbb{G}(B)$. La notation usuelle pour cet espace est $M^{\mathbb{G}} \stackrel{\text{def}}{=} M_{triv}$.

Lemme 2.3 *Si B est une k-algèbre, alors*

$$(M_B)^{\mathbb{G}_B} = M^{\mathbb{G}} \otimes_k B.$$

Preuve : Il s'agit de noter que $M^{\mathbb{G}}$ n'est rien d'autre que le noyau du morphisme k-linéaire $\Delta_M - \mathrm{id}_M \otimes 1_{k[\mathbb{G}]} : M \to M \otimes_k k[\mathbb{G}]$. Comme le foncteur $\bullet \otimes_k B$ est exact et additif, on obtient que $M^{\mathbb{G}} \otimes_k B$ est le noyau du morphisme B-linéaire

$$\Delta_M \otimes \mathrm{id}_B - \mathrm{id}_{M \otimes B} \otimes 1_{k[\mathbb{G}]} : M \otimes_k B \to M \otimes_k k[\mathbb{G}] \otimes_k B.$$

On voit aussitôt que ce morphisme n'est rien d'autre que $\Delta_{M_B} - \mathrm{id}_{M_B} \otimes 1_{k[\mathbb{G}_B]}$ ce qui permet de conclure. $\sharp$

Un morphisme $\phi : M \to M'$ entre deux $\mathbb{G}$-représentations M, M' se restreint à un morphisme de k-modules $\phi|_{M^{\mathbb{G}}} : M^{\mathbb{G}} \to M'^{\mathbb{G}}$. Ceci permet de définir un foncteur (dit “des points fixes”) :

$$\begin{array}{rcl} \bullet^{\mathbb{G}} : \mathbb{G}\text{-}\mathscr{R}ep & \to & k\text{-}\mathscr{M}od \\ M & \mapsto & M^{\mathbb{G}}. \end{array}$$

Proposition 2.5 *Le foncteur $\bullet^{\mathbb{G}}$ est exact à gauche, additif, et commute aux sommes directes et aux limites inductives.*

Preuve : La preuve est assez formelle. Comme toute k-algèbre B est plate sur k, on voit que que le foncteur oubli $\mathscr{F}or : \mathbb{G}\text{-}\mathscr{R}ep \to k\text{-}\mathscr{M}od$ commute aux noyaux : le foncteur $\bullet^{\mathbb{G}}$ commute donc aux noyaux.
Le foncteur des points fixes commute aux sommes directes infinies : c'est une conséquence immédiate de la définition de l'action de $\mathbb{G}$ sur une somme directe $\oplus_i M_i$ de $\mathbb{G}$-représentations, et de l'égalité $(\oplus_i M_i) \otimes_k k[\mathbb{G}] = \oplus_i (M_i \otimes k[\mathbb{G}])$. Par conséquent (cf. [17], §3.3) $\bullet^{\mathbb{G}}$ est exact à gauche.
Les vérifications de la commutativité aux intersections et aux limites directes sont similaires $\sharp$

On peut généraliser les notions de cette section, en remplaçant le caractère trivial *triv* par n'importe quel caractère $\lambda \in X(\mathbb{G})$. On voit aussitôt que :

i) si B est une k-algèbre, alors $(M_B)_{\lambda \otimes 1_B} = M_\lambda \otimes_k B$ (où $\lambda \otimes 1_B$ désigne le caractère de $\mathbb{G}_B$ induit par extension des scalaires) ;

ii) on dispose d'un foncteur

$$\begin{array}{rcl} \bullet_\lambda : \mathbb{G}\text{-}\mathscr{R}ep & \to & k\text{-}\mathscr{M}od \\ M & \to & M_\lambda \end{array}$$

qui est additif et exact à gauche ;
en fait, il s'agit de reparcourir les arguments du lemme 2.3 (en remplaçant $1_{k[\mathbb{G}]}$ par $f_\lambda \in k[\mathbb{G}]$) et de la proposition 2.5.

Chapitre 3

Le groupe linéaire général

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés générales du groupe $\mathbb{GL}_n$. On commence, dans le paragraphe §3.1, par rappeler la définition de quelques sous-groupes algébriques remarquables de $\mathbb{GL}_n$, et on continue avec l'étude des certaines sous-espaces des représentations du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$.
Le paragraphe suivant est moralement la conclusion de la premère partie de ce travail de stage : on commence par l'étude des certaines sous-espace des représentations de $\mathbb{GL}_2$, et on continue avec l'analyse des répresentations $\mathrm{Sym}^n k^2 \otimes_k \det^m$. On conclut avec le théorème de classification des représentations irreductibles de $\mathbb{GL}_2$ sur k (cf. théorème 3.2).
La référence principale pour ce chapitre a été le cours de M.F. Vigneras [18].

3.1 Sous-groupes algébriques de $\mathbb{GL}_n$

Le tore maximal $\mathbb{T}$ est défini comme le sous-foncteur de $\mathbb{GL}_n$ qui à $B \in k$-$\mathscr{A}lg$ associe $\mathbb{T}(B) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(\mathbb{GL}_n(B)) \leq \mathbb{GL}_n(B)$. Comme on a $\mathrm{Diag}(\mathbb{GL}_n(B)) \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{G}_m(B)$ fonctoriellement en B, on déduit que $\mathbb{T}$ est un groupe algébrique, avec $k[\mathbb{T}] \cong k[U_1, \ldots, U_n, U_1^{-1}, \ldots, U_n^{-1}]$. Via l'inclusion $\mathbb{T}(k[\mathbb{T}]) \leq \mathbb{GL}_n(k[\mathbb{T}])$ on voit que l'identité $\mathrm{id}_{k[\mathbb{T}]} \in \mathbb{T}(k[\mathbb{T}])$ correspond au morphisme $\psi \in \mathbb{GL}_n(k[\mathbb{T}])$ définit par

$$\begin{array}{ccc} k[\mathbb{G}] & \xrightarrow{\psi} & k[\mathbb{T}] \\ T_{ij} & \mapsto & \begin{cases} U_i & \text{si}\, i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Si M est une représentation de $\mathbb{GL}_n$ sur k, alors, par restriction, M est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{T}$-représentation. Pour connaître la nouvelle structure de $k[\mathbb{T}]$-comodule sur M il s'agit, par définition de la structure de

$\mathbb{T}$-représentation sur M, d'étudier $\psi \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{T}]})$ et, pour cela, on est ramené grâce aux propriétés de fonctorialité de l'action de $\mathbb{GL}_2$ sur M à l'étude de

$$\mathrm{Diag}(T_{ii}) \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}).$$

De façon similaire, on peut décrire les sous-groupes algébriques dans le cas $n = 2$:

i) $\mathbb{U} \cong \mathbb{G}_a$ des matrices strictement triangulaires supérieures ;

ii) $\mathbb{U}^- \cong \mathbb{G}_a$ des matrices strictement triangulaires inférieures ;

iii) $\mathbf{Z}(\mathbb{GL}_2)$, le centre de $\mathbb{GL}_2$.

On a enfin le sous groupe algébrique $\mathbb{V} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{U}^- \times \mathbb{T} \times \mathbb{U}$, connu comme la *grosse cellule*. Le fait remarquable est le suivant

Lemme 3.1 *Le monomorphisme naturel de k-algèbres $\phi : k[\mathbb{G}] \to k[\mathbb{U}^-] \otimes_k k[\mathbb{T}] \otimes_k k[\mathbb{U}]$ induit par l'inclusion $\mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{GL}_2$ est injectif.*

Preuve : Soit $f \in k[\mathbb{G}]$ tel que $\phi(f) = 0$. Grâce à Yoneda, pour toute k-algèbre B, le morphisme d'inclusion $\mathbb{V}(B) \hookrightarrow \mathbb{GL}_2(B)$ est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \hookrightarrow & \mathbb{GL}_2(B) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \circ \phi. \end{array}$$

Un calcul direct montre que $\mathbb{V}(B) = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ t.q. $a \in B^\times\}$. Il s'agit alors de considérer $B \overset{\text{def}}{=} k[\mathbb{G}]_{(T_{11})}$ (ouvert affine principal de $\mathbb{GL}_2$ défini par "$T_{11} \neq 0$") : le morphisme $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_2(k[\mathbb{G}]_{(T_{11})})$ est la localisation, et ce morphisme se factorise via ϕ dès que $T_{11} \in (k[\mathbb{G}]_{(T_{11})})^\times$. On conclut alors que $f = 0$, grâce à l'intégrité de $\mathbb{GL}_2$. $\sharp$

3.2 Le groupe multiplicatif

Considérons $\mathbb{G}_m = \mathrm{Hom}_k(k[T, T^{-1}], \bullet)$. On dispose d'une écriture explicite assez simple pour les morphismes structuraux de la bialgèbre $k[T, T^{-1}]$ (cf. l'exemple 1.9).
Soit M un k-module muni d'une action de $\mathbb{G}_m$. On a une décomposition

$$M \otimes_k k[T, T^{-1}] \cong \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M \otimes T^i$$

et $M \otimes_k k[T, T^{-1}]$ est un $k[T, T^{-1}]$-module gradué. Il suit que l'on peut définir des morphismes k-linéaires $p_i : M \to M$ par la condition :

$$\Delta_M(m) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i(m) \otimes T^i.$$

Lemme 3.2 *Dans la situation plus haut, on a :*

a) $\Delta_M(p_i(m)) = p_i(m) \otimes T^i$ *pour tout* $m \in M$ *;*

b) $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i(m)$ *pour tout* $m \in M$.

En particulier

$$p_i \circ p_j \quad = \quad \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ p_i \text{ si } j = i. \end{cases}$$

Preuve : Il s'agit de rappeler les conditions de compatibilité du morphisme Δ_M relatif à la structure de comodule sur M :

-) $\Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]} \circ \Delta_M = \mathrm{id}_M \otimes \Delta_{k[\mathbb{G}]} \circ \Delta_M$

-) $\mathrm{id}_M \otimes \epsilon \circ \Delta_M = \mathrm{id}_M$.

Ces deux conditions donnent respectivement :

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_M(p_i(m)) \otimes T^i = \Delta_M \otimes \mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}(\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i(m) \otimes T^i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i(m) \cdot T^i \otimes T^i$$

$$m = \mathrm{id}_M \otimes \epsilon(\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i(m) \otimes T^i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i(m)$$

d'où la conclusion. $\sharp$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. À l'aide du lemme 2.2, on définit un élément $\lambda_n \in X(\mathbb{G}_a)$ correspondant à $T^n \in k[T, T^{-1}]$. De façon explicite, pour tout k-algèbre B, $\lambda_{n\,B} : B^\times \to B^\times$ est défini par $b \mapsto b^n$.

Théorème 3.1 *Se donner une k-représentation de $\mathbb{G}_m$ revient à se donner un k-module, avec une décomposition $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ en sous k-modules, telle que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur M munit chaque M_i d'une action de $\mathbb{G}_m$ par le caractère λ_i. De plus, $X(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$.*

Preuve : Supposons que M soit muni d'une action de $\mathbb{G}_m$. À l'aide du lemme 3.2 on retrouve la décomposition $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$, où $M_i \overset{\text{def}}{=} p_i(M)$.
Encore grâce au lemme 3.2 on a que $(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) \cdot (p_i(m) \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}) = p_i(m) \otimes T^i$, ce qui montre que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur M définit une action de $\mathbb{G}_m$ sur chaque M_i, et que $\mathbb{G}_m$ agit sur M_i par le caractère λ_i.
Réciproquement, on vérifie que si $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille de $\mathbb{G}_m$-représentations, avec $\mathbb{G}_m$ agissant par le caractère λ_i sur chaque M_i, alors il y a une action naturelle de $\mathbb{G}_m$ sur $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$.

Pour l'isomorphisme $X(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$, prenons $\lambda \in X(\mathbb{G}_m)$, et vérifions que $\lambda(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) = T^i$ pour un $i \in \mathbb{Z}$ convenable. Soit $f_\lambda = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j T^j \in k[T, T^{-1}]$, avec $\alpha_j \in k$, $\alpha_j = 0$ pour presque tous les indices j. Alors, grâce aux descriptions explicites des morphismes de bialgèbres sur $k[T, T^{-1}]$, on voit que la condition $f_\lambda \otimes f_\lambda = \Delta_{k[\mathbb{G}]}(f_\lambda)$ donne $\alpha_j^2 = \alpha_j$ pour tout j (i.e. $\alpha_j \in \{0, 1, \}$ pour tout j). Ceci implique d'après $\epsilon(f_\lambda) = 1$ que $\alpha_j = 1$ pour un indice j et un seul. $\sharp$

3.3 Encore sur $\mathbb{GL}_2$

Considérons le groupe algébrique $\mathbb{GL}_2$, sur un corps de base k. Rappelons que l'on dispose d'un sous-groupe algébrique (i.e. sous-foncteur) remarquable, donné par le tore maximal $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ et que la structure de sous foncteur de $\mathbb{GL}_2$ est donné par le morphisme de k-bialgèbres

$$\begin{array}{rcl} k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}, (\det(X_{ij})_{ij})^{-1}] & \to & k[T, T^{-1}] \otimes k[T, T^{-1}] \\ X_{ij} & \mapsto & \begin{cases} T \otimes 1 \text{ si } (i,j) = (1,1) \\ 1 \otimes T \text{ si } (i,j) = (2,2) \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases} \end{array}$$

De plus, comme $\mathbb{T}$ est à valeurs dans la catégorie des groupes abeliens, on a

$$X(\mathbb{T}) = X(\mathbb{G}_m) \times X(\mathbb{G}_m)$$

et on voit que le lemme 2.2 donne

$$X(\mathbb{T}) \cong \{T^n \otimes T^m \in k[T, T^{-1}] \otimes k[T, T^{-1}] \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Ainsi $X(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^2$ en tant que groupe abelien. On va introduire le formalisme suivant : si $\lambda, \lambda' \in X(\mathbb{T})$, on pose $\lambda \geq \lambda'$ si les couples $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z}^2$, correspondant respectivement à λ, λ' via l'isomorphisme précédent, vérifient la relation $n - n' \geq m - m'$. En particulier, on dit que $\lambda \in X(\mathbb{T})$ est *positif* si $\lambda \geq triv$.

Pour conclure, on dispose d'un automorphisme (de groupes) sw de $\mathbb{T}$, donné par l'inversion : si B est une k-algèbre, on a

$$\begin{array}{rcl} sw_B : \mathbb{T}(B) & \to & \mathbb{T}(B) \\ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \end{array}$$

au niveau des bialgèbres, le morphisme s'écrit

$$\begin{array}{rcl} sw^* : k[T, T^{-1}] \otimes k[T, T^{-1}] & \to & k[T, T^{-1}] \otimes k[T, T^{-1}] \\ T \otimes 1 & \mapsto & 1 \otimes T \\ 1 \otimes T & \mapsto & T \otimes 1. \end{array}$$

Le morphisme sw induit (par precomposition) un automorphisme de groupes abeliens sur $X(\mathbb{T})$, qui renverse la "relation" $\geq$.

Soit M un k-module de type fini, muni d'une action de $\mathbb{GL}_2$. Alors, par restriction, M est aussi une représentation de $\mathbb{T}$, et on a une décomposition en k-sous modules

$$M = \bigoplus_{\lambda \in X(\mathbb{T})} M_\lambda$$

(cf. [13], théorème 9.15).

Dans la suite, on pose $w \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Lemme 3.3 *Dans la situation précédente, on a un isomorphisme k-linéaire $M_\lambda \to M_{\lambda\circ sw}$ donné par $m \mapsto w^{-1}\cdot m$.*

Preuve : Si l'on sait que l'application $m \mapsto w^{-1}\cdot m$ définit un morphisme k-linéaire de $M_\lambda \to M_{\lambda\circ sw}$, alors le morphisme devient automatiquement un isomorphisme, grâce à la relation $w^2 = -1$. Il s'agit donc de voir que si $m \in M_\lambda$, alors $w^{-1}{\cdot}m \in M_{\lambda\circ sw}$. Notons d'abord que si B est une k-algèbre, on a $(w^{-1}{\cdot}m)\otimes 1_B = w^{-1}{\cdot}(m\otimes 1_B)$. En effet, si $w^{-1}{\cdot}(m\otimes 1_{kg}) = \sum_j m_j \otimes f_{m,j}$ (où, m_j désigne une k-base de M et $f_{m,j} \in k[\mathbb{G}]$), alors

$$(w^{-1}{\cdot}m)\otimes 1_B = (\sum_j m_j f_{m,j}(w^{-1}))\otimes 1_B = \sum_j m_j \otimes f_{mj}(w^{-1}) = w^{-1}(m\otimes 1_B).$$

De plus, notons que $\lambda(w\cdot t\cdot w^{-1}) = \lambda\circ sw(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}(B)$. Enfin

$$t{\cdot}((w^{-1}{\cdot}m)\otimes 1_B) = w^{-1}{\cdot}(w\cdot t\cdot w^{-1}){\cdot}(m\otimes 1_B) = w^{-1}{\cdot}(m\otimes\lambda(w\cdot t\cdot w^{-1})) = (w^{-1}{\cdot}m)\otimes\lambda\circ sw(t)$$

d'où la conclusion. ♯

Considérons l'algèbre du groupe

$$\mathbb{Z}[X(\mathbb{T})] = \{\sum_{\lambda\in X(\mathbb{T})} \mu_\lambda[\lambda] \text{ avec } \mu_\lambda \in \mathbb{Z}, \text{ et } \mu_\lambda = 0 \text{ pour presque tout} \lambda \in X(\mathbb{T})\}$$

et posons

$$\mathbb{Z}[X(\mathbb{T})]^{sw} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sum_{\lambda\in X(\mathbb{T})} \mu_\lambda[\lambda] \text{ t.q. } \mu_\lambda = \mu_{\lambda\circ sw}\}.$$

Définition 3.1 *Soit M une $\mathbb{GL}_2$-représentation, de dimension finie sur k. On définit le caractère formel de M par :*

$$ch(M) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda\in X(\mathbb{T})} \dim_k M_\lambda \cdot [\lambda].$$

On note que la somme est finie (dès que $M = \bigoplus_{\lambda\in X(\mathbb{T})} M_\lambda$ est de dimension finie) et que d'après le lemme 3.3 on a $ch(M) \in \mathbb{Z}[X(\mathbb{T})]^{sw}$.

Liée à la définition de caractère formel, on a la notion de *poids* d'une représentation :

Définition 3.2 *Un poids d'une $\mathbb{GL}_2$-représentation M sur k est un caractère $\lambda \in X(\mathbb{T})$ tel que $M_\lambda \neq 0$. Un plus haut poids pour M est un poids $\lambda \in X(\mathbb{T})$ tel que $\lambda \geq \mu$ pour tout poids $\mu \in X(\mathbb{T})$ de M.*

Notons que la condition $M_\lambda = 0$ pour presque tout $\lambda \in X(\mathbb{T})$ implique que l'on dispose toujours d'un plus haut poids pour M ; de plus, le lemme 3.3 montre qu'un plus haut poids pour une représentation est toujours positif.

Caractère central. Soit M une $\mathbb{T}$-représentation sur k de dimension finie. On rappelle que l'on dispose d'un sous-groupe algébrique remarquable de $\mathbb{T}$, le centre $\mathbf{Z}(\mathbb{T})$, qui s'identifie de manière évidente au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On dira que M a un *caractère central* s'il existe $\lambda \in X(\mathbb{T})$ tel que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur M induit par l'inclusion $inc : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{T}$ advient par le caractère $\lambda \circ inc \in X(\mathbb{G}_m)$. Notons que

$$M_l \subseteq \bigoplus_{m+n=l} M_{(n,m)}$$

où M_l désigne le sous k-module maximal de M sur lequel $\mathbb{G}_m$ agit (via inc) par le caractère $l \in \mathbb{Z} \cong X(\mathbb{G}_m)$ (et $M_{(n,m)}$ est le k-sous module de M sur lequel $\mathbb{T}$ agit par le caractère $(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \cong X(\mathbb{T})$). Pour le voir, il suffit de considérer l'action de $\mathrm{id}_{k[T,T^{-1}]}$ sur $x \otimes 1_{k[T,T^{-1}]}$ avec $x \in M_{(n,m)}$

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \cdot (x \otimes 1_{k[T,T^{-1}]}) = x \otimes T^{n+m}, \tag{3.1}$$

qui montre donc l'inclusion $\bigoplus_{n+m=l} M_{(n,m)} \subseteq M_l$. On a enfin l'égalité, d'après $M = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} M_l$.
Dire que M admet un caractère central équivaut à la décomposition $M = M_l = \bigoplus_{n+m=l} M_{(n,m)}$: si $\lambda = (n,m)$ est un caractère central, on voit, grâce à (3.1), que $M = M_{n+m}$; réciproquement, si $M = M_l$, n'importe quel caractère $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n+m=l$ est central.

Lemme 3.4 *Soit M une $\mathbb{GL}_2$-représentation sur k.*
i) Si M est irréductible, alors M a un caractère central.
ii) Si M est irréductible (de dimension finie), M a un unique plus haut poids.

Preuve : *i*) Soit $M = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} M_l$ la décomposition de M en tant que $\mathbb{G}_m$-représentation. Il s'agit de montrer que $M = M_{l_0}$ pour un $l_0 \in \mathbb{Z}$ convenable. Soit $l_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_{l_0} \neq 0$. On prétend que M_{l_0} est une sous $\mathbb{GL}_2$-représentation non nulle de M. Soit donc B une k-algèbre, $g \in \mathbb{GL}_2(B)$; comme $M_{l_0} \otimes_k B = (M \otimes_k B)_{l_0 \otimes 1_B}$ (d'après la généralisation du lemme 2.3), il s'agit de montrer que si C est une B-algèbre, $\alpha \in \mathbb{Z}((\mathbb{GL}_2)_B(C))$, alors $\alpha \cdot (g \cdot (x \otimes 1_B)) \otimes 1_C = (g \cdot x \otimes 1_B) \otimes \alpha^{l_0}$. Mais, on a vu (même argument que dans le lemme 3.3) que $(g \cdot x \otimes 1_B) \otimes 1_C = g \cdot (x \otimes 1_B \otimes 1_C)$, où, dans le deuxième terme, g est vu comme élément de $(\mathbb{GL}_2)_B(C)$; comme α est central, la conclusion est alors évidente. Enfin, on utilise le fait que M est irréductible pour conclure que $M = M_{l_0}$.
ii) Si M est de dimension finie et possède un caractère central, disons $(n_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2$, alors on a $M = \bigoplus_{n+m=n_0+m_0} M_{(n,m)}$. L'unicité d'un plus haut poids (n,m) de M est triviale. $\sharp$

Petite digression sur le groupe additif. Soit M un k-module (en fait, il suffit de supposer que M est $\mathbb{Z}$-module), muni d'une action du groupe additif $\mathbb{G}_a$. Ils existent alors des applications k-linéaires $q_n : M \to M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui sont déterminées par la condition

$$\Delta_M(m) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n(m) \otimes T^n.$$

D'après la condition $\mathrm{id}_M \otimes \epsilon_{k[\mathbb{G}_a]} \circ \Delta_M = \mathrm{id}_M$ et la description explicite des morphismes de bialgèbre de $k[T]$, on a $q_0(m) = m$.
Soit maintenant M une $\mathbb{GL}_2$-représentation sur k ; comme le sous-groupe algébrique $\mathbb{U}$ de $\mathbb{GL}_2$ est isomorphe au groupe additif, on peut considérer la structure de $\mathbb{G}_a$-représentation sur M obtenue via l'inclusion $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{GL}_2$.

Proposition 3.1 *Soit M une $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_2$-représentation sur k, $\lambda \in X(\mathbb{T})$.*
Alors, $q_n(M_\lambda) \subseteq M_{\lambda+n\alpha}$, où $\alpha = (1, -1) \in \mathbb{Z}^2$

Preuve : Par définition, il s'agit d'étudier $\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \cdot q_n(x) \otimes 1_{k[\mathbb{T}]}$ où $x \in M_\lambda$ et $k[\mathbb{T}] = k[U_1, U_2, (U_1U_2)^{-1}]$; et pour cela, il suffit d'étudier $\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \cdot q_n(x) \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}$. D'une part, on a :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \cdot (\begin{bmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x \otimes 1)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \cdot (q_n(x) \otimes T_{12}^n);$$

d'autre part, on a

$$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_{11}T_{22}^{-1}T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} (\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \cdot (x \otimes 1) &= \begin{bmatrix} 1 & T_{11}T_{22}^{-1}T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x \otimes \lambda(\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix})) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n(x) \otimes \lambda(\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}) T_{11}^n T_{22}^{-n} T_{12}^n. \end{aligned}$$

En comparant les deux écritures dans $M \otimes k[\mathbb{G}]$, on trouve

$$q_n(x) \otimes \lambda(\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}) T_{11}^n T_{22}^{-n} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \cdot (q_n(x) \otimes T_{12}^2)$$

d'où la conclusion. $\sharp$

Remarque 3.1 On a un résultat analogue si l'on considère l'action de $\mathbb{U}^- \cong \mathbb{G}_a$ sur M : il suffit de remplacer n avec $-n$ dans la proposition 3.1 .

Corollaire 3.1 *Dans les hypothèses de la proposition* 3.1*, si* $\lambda \in X(\mathbb{T})$ *est un plus haut poids de* M*, alors* $M_\lambda \subseteq M^{\mathbb{U}}$*. En particulier,* $M^{\mathbb{U}} \neq 0$*.*

Preuve : Soit $\lambda \in X(\mathbb{T})$ un plus haut poids de M. Comme $\lambda + n\alpha > \lambda$ pour tout $n > 0$, on a $M_{\lambda+n\alpha} = 0$ pour tout $n > 0$. Pourtant si $x \in M_\lambda$, on a $q_n(x) = 0$ pour tout $n > 0$; comme $q_0(x) = x$, $\begin{bmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}) = x \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}$ ce qui permet de déduire l'énoncé. $\sharp$

Proposition 3.2 *Soit* $m \in M_\lambda^{\mathbb{U}}$ *(i.e.* $m \in M$ *tel que* $\begin{bmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (x \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}) = x \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}$ *et* $\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \cdot (x \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}) = x \otimes \lambda_{k[\mathbb{G}]}(\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix})$*).*
Alors, $k[\mathbb{U}^-] \cdot m = k[\mathbb{G}] \cdot m$*.*

Preuve : Soit $m \in M_\lambda^{\mathbb{U}}$, et fixons $\mathscr{B} = \{m_i\}_{i=1}^l$ une k-base de $k[\mathbb{G}] \cdot m$. Il suit que les $f_{m,i} \in k[\mathbb{G}]$ qui apparaissent dans l'écriture $(\mathrm{id}_{k[\mathbb{G}]}) \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}) = \sum_{i=1}^l m_i \otimes f_{m,i}$ sont, de façon nécessaire, linéairement indépendants sur k.
D'après le corollaire 2.1, il s'agit de montrer que les $\alpha_i \in k[T_{21}] = k[\mathbb{U}^-]$ qui apparaissent dans l'écriture

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{U}^-]}) = \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes \alpha_i$$

sont linéairement indépendants sur k.
D'après l'hypothèse $m \in M_\lambda^{\mathbb{U}}$, on a

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{U}^-\mathbb{B}]}) =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot (m \otimes \lambda)$$

(où λ dénote $\lambda_{k[\mathbb{U}^{-1}\mathbb{B}]}(\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix})$). Or, $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{U}^-(k[\mathbb{U}^-\mathbb{B}]) \subseteq \mathbb{G}(k[\mathbb{U}^-\mathbb{B}])$ et donc

$$g \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{U}^-\mathbb{B}]}) = \sum_{i=1}^{l} m_i \otimes \alpha_i(g).$$

Considérons le morphisme injectif $\phi : k[\mathbb{G}] \hookrightarrow k[\mathbb{U}^-\mathbb{B}]$ induit par la “grosse cellule”. D'après ce qui précède, on a $\phi(f_{m,i}) = \alpha_i(g)\lambda$: comme $\phi(f_{m,i})$ sont linéairement indépendants, les α_i le sont nécessairement. $\sharp$

Corollaire 3.2 *Avec les hypothèses de la proposition* 3.2*, supposons que* $M = k[\mathbb{G}] \cdot m$ *avec* $m \in M_\lambda^{\mathbb{U}}$.
Alors on a $\dim_k(M_\mu) \leq 1$ *pour tout poids* $\mu \in X(\mathbb{T})$ *; de plus si* $M_\mu \neq 0$ *alors* $\mu \leq \lambda$ *et* M *possède un unique sous-module maximal.*

Preuve : Avec les notations de la proposition 3.1, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot (m \otimes 1_{k[\mathbb{G}]}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n(m) \otimes T_{21}^n$$

et $q_0(m) = m$. Grâce à la remarque qui suit la proposition 3.1, on a alors que $q_n(m) \in M_{\lambda - n\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, les $q_n(m)$ sont linéairement indépendants : d'après le corollaire 2.1 on a

$$M = k[\mathbb{G}] \cdot m = k[\mathbb{U}^-] \cdot m = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \langle q_n(m) \rangle_k.$$

Ceci permet de conclure que les poids μ de M ont tous multiplicité au plus 1, et que l'on a $\mu \leq \lambda$.
Notons que si N est une sous-$\mathbb{G}$-représentation propre de M, alors tous ses poids μ sont tels que $\mu < \lambda$: en effet, on a $\dim_k M_\lambda = 1$ et $k[\mathbb{G}] \cdot m = M$; par conséquent, $N \leq \bigoplus_{\mu < \lambda} M_\mu$ en tant que k-espace vectoriel. Considérons la sous-$\mathbb{G}$-représentation L de M engendrée par la famille $\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{N \lneq M \text{ avec } N \text{ sous } \mathbb{G} \text{ représentation}\}$. On voit alors que pour tout $x \in \sum_{N \in \mathscr{L}} N$, $\Delta_M(x) \in (\bigoplus_{\mu < \lambda} M_\mu) \otimes k[\mathbb{G}]$ ce qui montre à l'aide de la proposition 2.1 généralisée que L est un sous-k-module propre de M. Donc, L est la sous $\mathbb{G}$-représentation maximale de M. $\sharp$

Corollaire 3.3 *Supposons, dans les hypothèses de la proposition* 3.2*, que* $\dim_k M^{\mathbb{U}} = 1$.
Alors, M *a une unique sous-représentation irréductible, à savoir la* $\mathbb{G}$*-représentation engendrée par* $M^{\mathbb{U}}$*. En particulier,* $k[\mathbb{G}] \cdot m = k[\mathbb{U}^-] \cdot m$ *pour* $m \in M^{\mathbb{U}}$.

Preuve : Considérons $N \leq M$, une sous-$\mathbb{G}$-représentation irréductible de M. Grâce au corollaire 3.1, on a $N^{\mathbb{U}} \neq 0$, ce qui implique $N^{\mathbb{U}} = M^{\mathbb{U}}$. Comme N est irréductible, on a $N = k[\mathbb{G}] \cdot n$ pour n'importe quel $n \in N^{\mathbb{U}} = M^{\mathbb{U}}$: donc $N = k[\mathbb{G}] \cdot M^{\mathbb{U}} = k[\mathbb{U}^-] \cdot M^{\mathbb{U}}$. $\sharp$

Les représentations $\mathrm{Sym}^n k^2 \otimes_k \det^m$**.** Considérons le k-module $\bigoplus_{i=0}^n k \cdot X^{n-i} Y^i = k[X,Y]_n^h$. On peut définir une action de $\mathbb{GL}_2$: si B est une k-algèbre et $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_2(B)$, on pose $g \cdot X^{n-i} Y^i \stackrel{\text{def}}{=} (aX + cY)^{n-i} (bX + dY)^i$, et on prolonge pour B-linéarité ; une vérification immédiate montre que ceci définit bien une action de $\mathbb{GL}_2$ sur $k[X,Y]_n^h$.
La représentation $\det^m$ est définie de la façon suivante. On considère le k-module

k ; pour toute k-algèbre B, l'action de $g \in \mathbb{GL}_2(B)$ sur $k \otimes_k B$ n'est rien d'autre que la multiplication par $(\det(g))^m$.
On s'intéresse à $M \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Sym}^n k^2 \otimes \det^m$. C'est facile de voir que $X^{n-i}Y^i \in M_{(n-i+m,i+m)}$: on en déduit le caractère formel

$$ch(M) = \sum_{i=0}^{n} (n-i+m, i+m),$$

ce qui montre que M a un caractère central et que le plus haut poids de M est $(m+n, m)$.

Définissons

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N} \text{ t.q. } 0 \leq j \leq n \,\text{et} \binom{n}{j} \neq 0_k\}.$$

Proposition 3.3 *Dans la situation précédente, on a*

i) $(\mathrm{Sym}^n k^2)^{\mathbb{U}} = \langle X^n \rangle_k$ *;*

ii) $\mathrm{Sym}^n k^2$ *a une unique sous représentation irréductible* L_n *: c'est la représentation engendrée par* $X^n \in k[X,Y]_n^h$ *;*

iii) on a $L_n = \langle X^{n-j}Y^j \ , j \in J \rangle_k \subseteq k[X,Y]_n^h$ *en tant que* k*-module ;*

iv) les poids de L_n *sont* $(n-j, j) \in \mathbb{Z}^2$ *pour* $j \in J$ *; en particulier,* $(n,0) \in \mathbb{Z}^2$ *est le plus haut poids de* L_n*.*

Preuve : *i*) C'est un calcul. Soit $v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{n} \lambda_l X^{n-l} Y^l \in (\mathrm{Sym}^n k^2)^{\mathbb{U}}$, et prenons $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_2(k[T])$. Comme v est invariant sous $\mathbb{U}(k[T])$, on a

$$g \cdot v = \sum_{l=0}^{n} \lambda_l X^{n-l}(TX+Y)^l = v.$$

Un calcul donne

$$g \cdot v = \sum_{s=0}^{n} X^{n-s} Y^s \sum_{l=s}^{n} \lambda_l \binom{l}{s} T^{l-s}.$$

Il suit que $\lambda_l \binom{l}{s} = 0_k$ pour tout $l \in \{0, \ldots, n\}$, $s \in \{0, \ldots, l\}$ tels que $l - s \geq 1$. Ceci est équivalent (en prenant $s = 0$) à la condition $\lambda_l = 0$ pour tout $l \in \{1, \ldots, n\}$.
ii) Découle d'après le corollaire 3.3, dès que $\dim_k (\mathrm{Sym}^n k^2)^{\mathbb{U}} = 1$.
iii) Considérons

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot X^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^{X^{n-j}} Y^j T_{11}^{n-j} T_{22}^{j} \in k[X,Y]_n^h \otimes k[\mathbb{G}].$$

Comme les $\{X^{n-j}Y^j\}_{j\in J}$ sont k-linéairement indépendants dans $k[X,Y]_n^h$ ainsi que les $T_{11}^{n-j}T_{22}^j$ dans $k[\mathbb{G}]$, le résultat découle d'après le corollaire 2.1.
iv) Il s'agit de rappeler que les poids de $M = \mathrm{Sym}^n k^2$ sont de la forme $(n-l, l) \in \mathbb{Z}^2$ (pour $0 \leq l \leq n$) et ont tous multiplicité 1, à savoir $M_{(n-l,l)} = \langle X^{n-l}Y^l \rangle_k$. Comme $L_n = \langle X^{n-j}Y^j \ , j \in J\rangle_k$, on conclut. ♯

Théorème 3.2 *i) Soient M, M' deux représentation irréductibles de $\mathbb{G} = \mathbb{G}\mathrm{L}_2$ (de type fini sur k), ayant le même plus haut poids. Alors, $M \cong M'$ en tant que $\mathbb{G}$-représentations.*

ii) Si $\lambda \in X(\mathbb{T})$ est un poids positif, il existe une représentation de $\mathbb{G}$ sur k, de plus haut poids λ.

iii) Les représentations irréductibles sur k de $\mathbb{G}$ sont de la forme $L_n \otimes \det^m$, pour $n \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

Preuve : Soit $\lambda \in X(\mathbb{T})$ le plus haut poids de M, M' (unique, d'après le lemme 3.4). Définissons la $\mathbb{G}$-représentation $V \overset{\text{def}}{=} M \oplus M'$, et soit $v \overset{\text{def}}{=} (m, m') \in V$, avec $m \in M_\lambda \setminus \{0\}$, $m' \in M'_\lambda \setminus \{0\}$; dans la suite, M et M' seront considérées comme des sous représentations de V.
Comme le foncteur $M \mapsto M_\lambda$ est additif, on déduit que λ est un plus haut poids de V, et $v \in V_\lambda$; il suit du corollaire 3.1 que $v \in V^{\mathbb{U}}$.
Définissons $M'' \overset{\text{def}}{=} k[\mathbb{G}] \cdot v$. Comme $v \in M''^{\mathbb{U}}_\lambda$, on a $\dim_k M''_\lambda = 1$ d'après le corollaire 3.2. Ceci implique que $m \notin M''$ et $m' \notin M''$. Comme M et M' sont simples, on en déduit que $M \cap M'' = 0 = M' \cap M''$.
Pour conclure, considérons la projection (non nulle) $\pi : V \twoheadrightarrow M$: la restriction de π à M'' donne un epimorphisme $M'' \twoheadrightarrow M$, qui est en fait un isomorphisme, grâce à la condition $M' \cap M'' = 0$. On a ainsi $M'' \cong M$ et, de même, $M'' \cong M'$ ce qui permet de conclure.
ii) Rappelons que si $n \geq 0$ et $m \in \mathbb{Z}$, alors la représentation $\mathrm{Sym}^n \otimes \det^m$ est de plus haut poids $(m+n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Tout poids positif $\lambda \in \mathbb{Z}^2$ est de la forme $(n+m, m)$ pour $n \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$.
iii) Notons que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la représentation $L_n \otimes \det^m$ de $\mathbb{G}$ est irréductible sur k, dès que L_n est irréductible et $\det^m$ est de dimension 1. En outre le plus haut poids de $L_n \otimes \det^m$ est $(n+m, m)$ et celles-là donnent tous les poids positifs (ou nuls) : la conclusion découle de la partie *i*). ♯

Chapitre 4

Sur la représentation $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$

Dans cette section on se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Soit p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}$. Alors :*
i) la représentation $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}_p^2})$ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ *est irréductible ssi $n < p$;*
ii) la représentation $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *est irréductible pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

La preuve utilise des techniques radicalement différentes dans les deux cas. Dans le paragraphe §4.1 on va classifie *toutes* les représentations irreductibles (de dimension finie) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ pour $q \stackrel{\text{def}}{=} p^f$. À part le théorème de Brauer, tous les outils utilisés sont des calculs élémentaires d'algèbre lineaire.
Le paragraphe §4.2 est consacré à la preuve du *ii*) du théorème 4.1, et utilise des outils plus techniques, comme la théorie des anneaux de Wedderburn, ou la notion du foncteur de Shur.
Les références principales ont été les polycopies de Breuil [3] pour le paragraphe §4.1, et le livre de Fulton et Harris [7] pour le paragraphe 4.2.

4.1 Le cas de caractéristique positif

En caractérisitique $p > 0$, on va montrer un résultat un peu plus général. Soit $q \stackrel{\text{def}}{=} p^f$, $n \in \mathbb{N}$, et fixons un plongement $\mathbb{F}_q \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$. Pour $0 \leq j \leq f-1$, on definit la représentation $(\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2))^{frob^j}$: l'espace vectoriel sous-jacent est celui de $\mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$, et l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{n-i}Y^i \stackrel{\text{def}}{=} (a^{p^j}X + c^{p^j}Y)^{n-i}(b^{p^j}X + d^{p^j}Y)^i$$

(où $a, b, c, d \in \mathbb{F}_q$ sont vus comme elements de $\overline{\mathbb{F}}_p$ via le plongement fixé plus haut).

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 4.2 (Brauer) *Soit G un groupe fini. Définissons $G_{\text{reg}} \overset{def}{=} \{g \in G\,\text{t.q.}\,(\text{ord}(g), p) = 1\}$. Le nombre des représentations irréductibles de G sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension finie est le nombre des classes de conjugaison dans G_{reg}.*

Preuve : Omissis (cf. [5]). Notons que, si $h \in G_{\text{reg}}$, les éléments de sa classe de conjugaison dans G sont en fait contenus dans G_{reg}. $\sharp$

Un autre outil élémentaire mais utile :

Lemme 4.1 *Soit G un p-groupe fini, agissant sur un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V non nul. Alors, le sous-espace des invariants V^G est non nul.*

Preuve : Soit $x \in V \setminus \{0\}$, et soit $\{0\} \neq W \leq V$ le sous $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de V engendré par l'ensemble $W' \overset{\text{def}}{=} \{g.x,\ g \in G\}$. On note que W est de cardinal fini (dés que $\text{Card}(W') < \infty$ et $\text{Card}(\mathbb{F}_p) = p$). On en déduit que $\text{Card}(W) = p^m$ pour $m \in \mathbb{N}^\times$.
Or, G agit sur W, ce qui donne une décomposition de W en orbites $W = \coprod_i G \cdot w_i$ pour un nombre fini de $w_i \in W$ convenables. De plus, on a $\text{Card}(G \cdot w_i) = \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(G_{w_i})} = p^{n_i}$ pour un $n_i \in \mathbb{N}$, et on a $n_i = 0$ ssi $w_i \in W^G$.
On conclut :

$$p^m = \text{Card}(W^G) + pc$$

pour un $c \in \mathbb{N}$ ce qui donne $(m \geq 1)$ $p|\text{Card}(W^G)$. Comme $\text{Card}(W^G) \geq 1$ (dés que $0 \in W^G$), on en déduit le résultat. $\sharp$

Voici la première étape pour la preuve (de la généralisation) de la partie $i)$ du théorème 4.1.

Lemme 4.2 *Soient $n_0, \dots, n_{f-1} \in \{0, \dots, p-1\}$ et $m \in \{0, \dots, q-2\}$. Alors, les $q(q-1)$ représentations*

$$\rho(n_0, \dots, n_{f-1}, m) \overset{\text{def}}{=} \text{Sym}^{n_0}(\overline{\mathbb{F}}_p^2) \otimes (\text{Sym}^{n_1}(\overline{\mathbb{F}}_p^2))^{\text{Frob}} \otimes \cdots \otimes (\text{Sym}^{n_{f-1}}(\overline{\mathbb{F}}_p^2))^{\text{Frob}^{f-1}} \otimes \det{}^m$$

sont irréductibles et deux à deux non isomorphes.

Preuve : *Étape* 1. On va identifier la représentation $\rho \overset{\text{def}}{=} \rho(n_0, \dots, n_{f-1}, m)$ avec la représentaiton π suivante. L'espace vectoriel sous-jacent à π est donné par :

$$|\pi| \overset{\text{def}}{=} \oplus_{i_0=0}^{n_0} \oplus_{i_1=0}^{n_1} \cdots \oplus_{i_{f-1}}^{n_{f-1}} \langle X^{\sum_{j=0}^{f-1}(n_j - i_j)p^j} Y^{\sum_{j=0}^{f-1} i_j p^j} \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$$

et on va definir une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot (X^{\sum_{j=0}^{f-1}(n_j-i_j)p^j} Y^{\sum_{j=0}^{f-1} i_j p^j}) \stackrel{\text{def}}{=} (aX+cY)^{\sum_{j=0}^{f-1}(n_j-i_j)p^j}(bX+dY)^{\sum_{j=0}^{f-1} i_j p^j}(\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}))^m.$$

On verifie facilement que l'on a un isomorphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$-equivariant donné par :

$$\begin{array}{rcl} \pi & \stackrel{\sim}{\rightarrow} & \rho \\ X^{\sum_{j=0}^{f-1}(n_j-i_j)p^j} Y^{\sum_{j=0}^{f-1} i_j p^j} & \mapsto & X^{n_0-i_0}Y^{i_0} \otimes \cdots \otimes X^{n_{f-1}-i_{f-1}}Y^{i_{f-1}}. \end{array}$$

Étape 2. Verifions l'irréductibilité de π. Soit $0 \neq V \leq \pi$ un sous espace $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-stable. En particulier, V est stable sous $U \stackrel{\text{def}}{=} \{\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \in \mathbb{F}_q\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ et, d'après le lemme 4.1, on a $V^U \neq 0$. Dans la suite, on utilise la notation multindice $\underline{i} \stackrel{\text{def}}{=} (i_0, \dots, i_{f-1})$, avec $i_j \in \mathbb{N}$, et on considère la base canonique $e_{\underline{i}} \stackrel{\text{def}}{=} X^{\sum_{j=0}^{f-1}(n_j-i_j)p^j} Y^{\sum_{j=0}^{f-1} i_j p^j}$ de π.

Considérons donc $0 \neq v = \sum_{\underline{i} \leq \underline{n}} \lambda_{\underline{i}} e_{\underline{i}} \in V^U$, $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U$. Un calcul ennuyant donne :

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e_{\underline{i}} = \sum_{\underline{l} \leq \underline{i}} \binom{\underline{i}}{\underline{l}} x^{\sum_j (i_j-l_j)p^j} e_{\underline{l}}.$$

On en déduit que $(\lambda_{\underline{i}})_{\underline{i}}$ est un vecteur propre d'une matrice diagonale par blocs, avec le bloc "(j,j)" donné par :

$$M_{j,j} = \begin{bmatrix} 1 & x^{p^j} & \dots & x^{n_j p^j} \\ 0 & 1 & \dots & x^{(n_{j-1})p^j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

Une telle matrice possède une valeur propre et une seule (qui vaut 1) et l'espace propre associé est de dimension 1. On conclut que

$$V^U = \langle e_{\underline{0}} \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}.$$

Maintenant, étudions

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot e_{\underline{0}} = \sum_{\underline{l} \leq \underline{n}} x^{\underline{l}} \binom{\underline{n}}{\underline{l}} e_{\underline{l}};$$

Rappellons que si W est un espace vectoriel sur un corps C, $v_1, \dots, v_N \in W$ et $\alpha = (\alpha_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ est une matrice inversible à coefficients dans C, alors

$$\langle v_j,\ j \in \{1, \dots, N\} \rangle_C = \langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} v_j,\ i \in \{1, \dots, N\} \rangle_C.$$

L'espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ engendré par la famille $\{\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e_{\underline{0}}\ x \in \mathbb{F}_q\}$ coïncide donc avec l'espace sous-jacent à π.
Étape 3.

Vérifions que les représentations précédentes sont à deux à deux non isomorphes. Considérons la donnée d'un isomorphisme de représentations

$$\rho(\underline{n}, m) \cong \rho(\underline{n'}, m').$$

Definissons $I \stackrel{\text{def}}{=} \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ avec $c = 0\}$; comme $U \trianglelefteq I$ et $\dim \rho^U = 1$, on en déduit que l'on dispose d'un isomorphisme I-equivariant

$$\rho(\underline{n}, n)^U \cong \rho(\underline{n'}, m')^U. \tag{4.1}$$

De plus, le sous-groupe $\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix}\ x \in \mathbb{F}_q^\times\}$ agit sur $\rho(\underline{n}, m)$ par le caractère $x \mapsto x^{\sum_j n_j p^j}$; il suit que $x^{\sum_j n_j p^j} = x^{\sum_j n'_j p^j}$ pour tout $x \in \mathbb{F}_q^\times$. D'après les restrictions sur les n_j, on en déduit que ou bien $\underline{n} = \underline{n'}$, ou bien $\underline{n} = \underline{0}$ et $\underline{n'} = (p-1, \ldots, p-1)$ (ou vice-versa). Mais ce dernier cas ne peut pas se produire, pour des raisons de dimension sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.
Il ne reste qu'à verifier $m = m'$. On peut étudier l'action de $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\ x \in \overline{\mathbb{F}}_p\}$ sur ρ^U, qui est donnée par le caractère $\det^m$. La condition $x^m = x^{m'}$ pour tout $x \in \mathbb{F}_q^\times$ qui vient de l'isomorphisme 4.1 permet de conclure que $m = m'$ d'après les limitations sur m, m'. $\sharp$

On a trouvé donc $q(q-1)$ représentations irréductibles deux à deux non isomorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$. Voici le résultat qui permet de conclure :

Lemme 4.3 *Les représentations du lemme* 4.2 *fournissent toutes les représentations irréductibles de dimension finie de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Preuve : D'après le lemme 4.2 on a $q(q-1)$ représentations irréductibles deux à deux non isomorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de dimension finie. À l'aide du théorème de Brauer, il suffira de montrer qu'ils existent exactement $q(q-1)$ telles représentations. Or, on a

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{reg}} = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \text{ t.q. } g \text{ est diagonalisable dans une extension de } \mathbb{F}_\mathrm{q}\}.$$

En effet soit $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$; alors, dans une extension finie de $\mathbb{F}_q$ et quitte à conjuger (ce qui ne change pas l'ordre de g) on aura $g \cong \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ ou bien $g = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$. Dans le premier cas, on a $g^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$, ce qui donne

$p|\mathrm{ord}(g)$; dans le deuxieme cas, on a $\mathrm{ord}(g) = ppmc(\mathrm{ord}(\alpha), \mathrm{ord}(\beta))$, ce qui montre que $p \nmid \mathrm{ord}(g)$.
On a donc

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{reg}}/\sim = A \sqcup B$$

où

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{F}_q^\times \}/\sim$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)_{\mathrm{reg}} \text{ avec } g \sim \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{bmatrix} \exists x \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q \}/\sim$$

et $1 \neq \sigma \in \mathscr{G}al(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$.
Calculons $\mathrm{Card}(A)$. On a $(q-1)$ classes d'éléments du centre $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q))$, et $\frac{(q-1)^2-(q-1)}{2}$ classes $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}_\sim$ avec $\alpha \neq \beta$. Donc $\mathrm{Card}(A) = \frac{q(q-1)}{2}$.
On va étudier $\mathrm{Card}(B)$. On commence par montrer que

$$B = \{ \text{matrices associéees au produit } \mathbb{F}_{q^2} \xrightarrow{x\cdot -} \mathbb{F}_{q^2} \text{ pour } x \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q \}/\sim . \quad (4.2)$$

Soit $x \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$; alors, $\{1, x\}$ est une $\mathbb{F}_q$-base de $\mathbb{F}_{q^2}$, et on voit aussitôt que la matrice associée au "produit par x" est $\begin{bmatrix} 0 & -N(x) \\ 1 & Tr(x) \end{bmatrix}$ (avec la notation habituelle : $N = N_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}$ est la norme, $Tr = Tr_{\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q}$ la trace), dont les valeurs propres sont précisement $x, \sigma(x)$.
Réciproquement, prenons $[g]_\sim \in B$, et soit $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ un représentant. Comme $c \neq 0$ (les valeurs propres de g ne sont pas dans $\mathbb{F}_q$!), on voit que $g \sim \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$ (pour des $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$) sur $\mathbb{F}_q$, et donc g est, à conjugason près, la matrice du "produit par x" pour x une racine de $X^2 - \beta X - \alpha$. Ceci montre (4.2).
Comme les valeurs propres doivent être les mêmes, on a

$$\begin{bmatrix} 0 & -N(x) \\ 1 & Tr(x) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -N(y) \\ 1 & Tr(x) \end{bmatrix} \iff x = \sigma(y) \text{ ou bien } x = y.$$

Mais la dernière condition est équivalente à demander que x, y soient dans la même orbite de l'action de $\mathscr{G}al(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$, d'où $\mathrm{Card}(B) = \frac{\mathrm{Card}(\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q)}{2} = \frac{q^2-q}{2}$.
Ceci permet de conclure. $\sharp$

4.2 Le cas de caractéristique zéro

L'objet de ce paragraphe est la démonstration de l'irréductibilité de la représentation $\mathrm{Sym}^d(\mathbb{C}^2)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Pour cela, on va utiliser la théorie liée au foncteur de Schur $\mathbb{S}_{(d)}$ (pour plus de détails, cf. [7], §6.1). Dans notre situation, on a

$$\mathbb{S}_{(d)} = V^{\otimes d} \cdot (\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma)$$

où l'on considère l'action évidente à droite de $\mathfrak{S}_d$ sur $V^{\otimes d}$; et, comme $\mathrm{char}(\mathbb{C}) = 0$, on a

$$V^{\otimes d} \cdot (\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma) = \mathrm{Sym}^d(\mathbb{C}^2) =$$

(cf. [7], appendice B.2)

On se place alors dans un cadre plus général : λ désigne une partition de $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim V$, où V est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel, et soit $\mathbb{S}_\lambda(V)$ le foncteur de Schur associé.
Considérons

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d}) \text{ t.q. } \phi(v \cdot g) = \phi(v) \cdot g \, \forall v \in V^{\otimes d}, g \in \mathfrak{S}_n\} =$$
$$= (\mathrm{Hom}_C(V^{\otimes d}, V^{\otimes d}))^{\mathfrak{S}_n}.$$

Les morphisme de la forme $\phi \otimes \cdots \otimes \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d})$ avec $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ sont en fait dans B.

Lemme 4.4 *L'algèbre des commutateurs B est engendrée, en tant que $\mathbb{C}$-sous espace de $Hom_{\mathbb{C}}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d})$, par des éléments de la forme $\phi \otimes \cdots \otimes \phi$ avec $\phi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, V)$. De plus, un $\mathbb{C}$-sous espace de $V^{\otimes d}$ est B-stable ssi il est invariant sous* $\mathrm{GL}_2(V)$.

Preuve : Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On sait que $\mathrm{Sym}^d(W)$ est engendré, en tant que $\mathbb{C}$-sous espace de $W^{\otimes d}$, par des éléments de la forme $d! w \otimes \cdots \otimes w$ avec $w \in W$.
Si $W \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, on note que

$$W^{\otimes d} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d})$$

isomorphisme canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, compatible à l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$.
Il suit que

$$B \cong (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d}))^{\mathfrak{S}_n} \cong ((\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V))^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_n} \cong \mathrm{Sym}^d(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V))$$

d'où la conclusion pour la première partie du lemme.
Pour la deuxième, on note qu'un $\mathbb{C}$-sous espace de $V^{\otimes d}$ est invariant sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ssi il est sous $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$: en fait, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe dense de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, et l'action naturelle de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ sur V est continue.
La conclusion découle alors de la première partie du lemme. $\sharp$

Il suffit maintenant de voir que $\mathbb{S}_\lambda V$ est un B module (à gauche) irréductible et ceci vient de la construction suivante.

Soit G un groupe fini, U un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action à droite de G ; posons

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,U)\ \text{t.q.}\ \phi(v\cdot g) = \phi(v)\cdot g\, \forall v \in U, g \in \mathfrak{S}_n\}$$

et on note que U est un B-$\mathbb{C}[G]$ bimodule [1] .
Si $U = \bigoplus_i U_i^{\oplus n_i}$ est une décomposition en sous-G-modules irréductibles, on a (lemme de Schur)

$$B = \mathrm{Hom}_G(U,U) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_G(U_i,U_j) \cong \bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{C}).$$

On note $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[G]$.

Lemme 4.5 *Soit U un A-module à gauche (de dimension finie sur $\mathbb{C}$).*
- *i) Si $c \in A$, le morphisme $U \otimes_A (A \cdot c) \xrightarrow{\sim} U \cdot c$ est un isomorphisme de B-modules à gauche.*
- *ii) Si $A\cdot c$ est un A-module à gauche irréductible, alors $U \cdot c$ est un B-module à gauche irréductible.*

Preuve : i) Notons que $A\cdot c$ est un facteur direct de A (on rappelle que si G est un groupe fini agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, toute sous-représentation de V admet un complémentaire G-stable). Donc, dés que $U \otimes_A \bullet$ est un foncteur additif, on dispose du diagramme commutatif de B-modules à gauche :

$$\begin{tikzcd}
U \otimes_A A \arrow[r, two heads, "\cdot c"] \arrow[d, "\wr"] & U \otimes_A (A \cdot c) \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted] & U \otimes_A A \arrow[d, "\wr"] \\
U \arrow[r, two heads] & U \cdot c \arrow[r, hook] & U,
\end{tikzcd}$$

ce qui permet de conclure.
ii) On va distinguer deux cas.
$CasI$: U est un A-module irréductible. D'une part, d'après le lemme de Schur, $B \cong \mathbb{C}$. D'autre part, la théorie des anneaux de Wedderburn (cf. [16], pag.37) montre que :
- -) on a un isomorphisme $A \cong \otimes_{i=1}^r M_{m_i}(\mathbb{C})$;
- -) $A \cdot c$ s'identifie à un idéal à gauche minimal de A ;
- -) un tel idéal s'identifie à un sous-ensemble de A constitué par des éléments de la forme $c_1 \oplus \cdots \oplus c_r \in A$ tels que $c_i = 0_{M_{m_i}(\mathbb{C})}$ pour tout indice $i \neq i_0$ (avec i_0 indice fixé qui ne dépend que de l'idéal) et c_{i_0} a toutes ses colonnes égales à zéro, sauf la j-ieme colonne, où j est un indice qui ne dépend que de l'idéal.

[1] $\mathbb{C}[G]$ désigne l'algèbre du groupe associé à G

De même, U est un A-module à gauche irréductible et s'identifie à un idéal à droite minimal de A, dont la description est similaire à la précédente, en remplaçant "colonne" avec "ligne".
Il suit que $U \otimes_A A \cdot c$ est un C-espace vectoriel de dimension au plus 1, et en particulier est un B module irréductible.
$CasII$: le cas général. Soit donc $U = \bigoplus_i U_i^{\oplus n_i}$ une décomposition de U en A-modules à droite irréductibles. Donc, en posant $W \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot c$, on a

$$U \otimes_A W \cong \bigoplus_i (U_i \otimes_A W)^{n_i} \cong \bigoplus_i (\lambda_i \mathbb{C})^{n_i}$$

avec $\lambda_i \in \{0, 1\}$ et $\lambda_i = 0$ pour tout indice i, sauf au plus un indice i_0. On voit aussitôt que alors l'action de $B = \bigoplus_j M_{n_j}(\mathbb{C})$ fait de $U \otimes_A W$ un B-module irréductible. $\sharp$

L'irréductibilité de $\mathbb{S}_\lambda V$ découle alors du fait que $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot c_\lambda$ sont des $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-modules irréductibles (cf. [7], lemme 4.25).

Chapitre 5

Une suite exacte de représentations

Le but de ce chapitre est déttailler la démonstration d'un résultat qui apparaît dans l'article de Breuil [2], ici énoncé dans le lemme 5.3. D'abord (§5.1) on introduit des notions élémentaires concernant les representations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$. Ensuite on énonce et démontre le lemme 5.3 (§5.2 et 5.3).
Le paragraphe suivant (§5.4) est consacré à la preuve d'un resultat de Glover [8]. Enfin, en combinant les deux résultats, on peut décrire de manière explicite les facteurs de Jordan-Hölder des représentations $\mathrm{Sym}^k(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ pour n'importe que $k \in \mathbb{N}$. On conlut avec un exemple issue de [4].

5.1 Représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(F)$

Soit p un nombre premier, F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers, et $\varpi_F \in \mathcal{O}_F$ une uniformisante. Soit $f \in \mathbb{N}^\times$ le degré résiduel. Pour résumer,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_q & \mathcal{O}_F \arrow[r, hook] & F \arrow[d, dash] \\ \mathbb{F}_p & \mathbb{Z}_p \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathbb{Q}_p. \end{tikzcd}$$

Les groupes qui apparaissent plus souvent dans l'étude de la correspondance de Langlands p-adique sont les suivants. On a $G \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_2(F)$, le pro-$p$-groupe $K \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F) \cong \varprojlim \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/\varpi_F^n)$; les sous-groupes $K_n \overset{\text{def}}{=} \ker(K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/\varpi_F^n))$, qui fournissent une base de voisinages de 1 dans K ; $I \leq K$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo ϖ_F, et $I_1 \leq I$ le sous-groupe des matrices unipotentes modulo ϖ_F. Enfin, rappellons $\mathbf{Z}(G) \cong F^\times$ le centre de G. Une notion de base est celle des représentations *lisses* :

Définition 5.1 *Soit H un groupe topologique agissant sur V, un espace vectoriel sur un corps C. On dit que un vecteur $v \in V$ est un* vecteur lisse *(pour l'action de H) si le stabilisateur $\mathrm{Stab}_H(v)$ est un voisinage de $1 \in H$ (i.e. si c'est un sous-groupe ouvert de H). On dit que l'action de H est* lisse *(ou que la representation est lisse) si tout vecteur $v \in V$ est lisse.*

Un premier résultat classique sur les representations lisses est le suivante :

Proposition 5.1 *Soit G un pro-p-groupe, $\pi \neq 0$ une représentation lisse de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.*
Alors, l'espace des invariants π^G est non nul.

Preuve : Soit V_π l'espace vectoriel sous-jacent de π, et fixons $v \in V_\pi \setminus \{0\}$; on définit $\rho' \overset{\mathrm{def}}{=} \{g \cdot v \in V_\pi,\ g \in G\}$ et $\rho \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \rho' \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ le sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$ espace vectoriel de V_π engendré par ρ'.
Comme π est lisse, le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(v)$ est un sous-groupe d'indice fini, ce qui permet de conclure que $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \rho < \infty$. Soit $v_1, \ldots, v_d \in \rho$ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de ρ. On voit que ρ est une sous-G-représentation de π, de noyau

$$\mathrm{Ker}(\rho) = \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Stab}_G(v_i);$$

par conséquent, $\mathrm{Ker}(\rho)$ est un sous-groupe (normal et) ouvert de G.
Il suit (cf. [19], théorème 1.2.5) que le quotient $G/\mathrm{Ker}(\rho)$ est un pro-p-groupe fini, i.e. un p-groupe. Pour conclure, on note que ρ est de façon naturelle une représentation (non nulle) du quotient $G/\mathrm{Ker}(\rho)$, et on utilise les résultats classiques sur les représentations des groupes finis. $\sharp$

La "brique" fondamentale de l'étude des représentations lisses de G est donnée par la notion de *poids* :

Définition 5.2 *Un poids de K est une représentation irreductible lisse de K sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de dimension finie.*

Par lissité, l'action de K sur un poids est triviale sur un sous-groupe ouvert de base K_n. Plus precisement, on a le

Lemme 5.1 *Soit σ un poids de K. Alors l'action de K se factorise via $K \twoheadrightarrow K/K_1 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.*

Preuve : Notons que K_1 est un pro-p-groupe, normal dans K : grâce au lemme 5.1, σ^{K_1} est une sous-représentation non nulle de σ, donc égale à σ par irréductibilité. $\sharp$

La conséquence étonnante est alors que l'on connait déjà tous les poids de K, grâce aux résultats vus dans le paragraphe §4.1.
Étant donnée une K-représentation (lisse) σ, on étend l'action de K à $KF^\times$ "en faisant agir ϖ_F par l'identité". De manière précise, on note que tout $x \in KF^\times$ s'écrit $x = \kappa \cdot \alpha$ avec $\kappa \in K$, $\alpha \in F^\times$ et l'écriture est unique à produit par une unité près : la condition $\kappa_1 \cdot \alpha_1 = \kappa_2 \cdot \alpha_2$ donne $\alpha_2 = \alpha_1 u$, $\kappa_2 = \kappa_1 \cdot u^{-1}$ pour $u \in \mathcal{O}_F^\times$; on peut donc définir un morphisme continu de groupes

$$\begin{array}{ccc} KZ & \rightarrow & K \\ \kappa \cdot \alpha & \mapsto & \kappa \cdot \alpha \cdot p^{-v_{\varpi_F}(\alpha)} \end{array}$$

où v_{ϖ_F} désigne la valuation ϖ_F-adique sur F. L'action de $KF^\times$ sur σ est obtenue par composition avec le morphisme plus haut, et cette "nouvelle" représentation est notée $\underline{\sigma}$.

Remarque 5.1 *Dans la suite, σ_k (pour $k \in \mathbb{N}$) designe l'espace vectoriel* $\mathrm{Sym}^k(\overline{\mathbb{F}}_p^2)$ *muni indifférentement de l'action naturelle de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$*, de* $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *(par composition via* $K \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ *à partir de l' action de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$*), ou de* $K\mathbb{Q}_p^\times$ *(en faisant agir p par l'identité).*

Bien sûr, ceci nous permet de disposer de toutes les représentations irréductibles lisses de $KF^\times$, avec action triviale de ϖ_F. Mais, dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$, on peut être plus explicite. Rappellons que la théorie de corps de classe local donne une injection $\iota : \mathbb{Q}_p^\times \hookrightarrow G_p^{ab}$ (où $G_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et G_p^{ab} dénote l'abelianisé topologique de G_p).

Lemme 5.2 *Soit $\epsilon : G_p^{ab} \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p-adique. Alors, $\epsilon|_{\mathbb{Z}_p^\times} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p^\times}$ et $\epsilon(p) = 1$.*

Preuve : Omissis (cf. [1], lemme 4.2.1).$\sharp$

Notons ω la réduction mod p du morphisme $\epsilon \circ \iota : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$. Si σ est une représentation lisse de $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on vérifie aussitôt que

$$\underline{\sigma \otimes \overset{l}{\det}} = \underline{\sigma} \otimes \omega^l$$

(on a fixé un plongement $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$, pour donner un sens au produit tensoriel plus haut).
Voici la conclusion :

Proposition 5.2 *Soit $F = \mathbb{Q}_p$. Les représentations irréductibles lisses de $KF^\times$ (sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, de dimension finie) avec action triviale de ϖ_F sont précisement*

$$\sigma_i \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \omega^m$$

pour $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $m \in \{0, \ldots, p-2\}$.

Preuve : Vue plus haut. $\sharp$

5.2 L'énoncé du lemme

Dans la suite, on se propose de démontrer le résultat suivant, dû à Breuil (cf. [2]) :

Lemme 5.3 (Breuil) *Soit $k \in \{p+2, \dots, 2p\}$.*

i) Si $k = p+2$, on a une suite exacte de représentations de KZ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \sigma_1 & \longrightarrow & \sigma_p & \longrightarrow & \sigma_p \otimes (\omega \circ \det) & \longrightarrow & 0 \\ & & (X,Y) & \longmapsto & (X^p, Y^p) & & & & \\ & & & & X^{p-i}Y^i & \longmapsto & (-1)^{i-1}\binom{p-2}{i-1}X^{p-1-i}Y^{i-1} & \text{si}\, i \neq 0, p & \\ & & & & & & 0 & \text{sinon.} & \end{array}$$

ii) Si $p+3 \leq k \leq 2p$, on a une suite exacte de représentations de KZ :

$$0 \longrightarrow \sigma_{k-3-p} \otimes (\omega \circ \det) \oplus \sigma_{k-1-p} \xrightarrow{\phi_1 \oplus \phi_2} \sigma_{k-2} \xrightarrow{\psi} \sigma_{2p-k} \otimes (\omega^{k-1-p} \circ \det) \longrightarrow 0$$

où

$$\psi(X^{k-2-i}Y^i) = \begin{cases} (-1)^{k-i}\binom{2p-k}{p+1-k+i}X^{p-1-i}Y^{p-k+1+i} & \text{si}\, k-1-p \leq i \leq p-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_1(X^{k-3-p-i}Y^i) = X^{k-3-i}Y^{1+i} - X^{k-2-p-i}Y^{p+i}$$
$$\text{si}\, 0 \leq i \leq k-p-3;$$

et

$$\phi_2(X^{k-1-p-i}Y^i) = (\binom{k-1-p}{i})^{-1}(\binom{k-2}{i}X^{k-2-i}Y^i + \binom{k-2}{p-1+i}X^{k-1-p-i}Y^{p-1+i})$$
$$\text{si}\, 0 \leq i \leq k-1-p$$

La preuve est très calculatoire, et sera découpée en morceaux dans le paragraphe §5.3. Commençons par quelques résultats préliminaire.

Lemme 5.4 *On a les relations suivantes modulo p.*

i) Soit $p \leq i \leq 2p-2$, $0 \leq j \leq i$. Alors $\binom{i}{j} \equiv 0$ ssi $i+1-p \leq j \leq p-1$.

ii) $\binom{i}{j} - \binom{p-1+i}{j} \equiv \binom{p-1+i}{p-1+j}$ pour $p-1 \geq i \geq 1$, $0 \leq j \leq i$.

iii) $\binom{i+p}{j+p} \equiv \binom{i}{j}$ pour $i \geq 0$, $0 \leq j \leq i$.

iv) $\binom{i+p}{j} \equiv \binom{i}{j}$ pour $i \geq 0$, $i \geq j \geq 0$.

Preuve : *i)* Considérons $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$, et on note que $v_p(i!) = 1$.
Si $j < i+1-p$, alors $v_p(j!) = 0$ ($j \leq p-1$), et $v_p((i-j)!) = 1$ ($2p-1 > i-j \geq p$) ;
si $p \leq j \leq i$, on a $v_p(j!) = 1$ et $v_p((i-j)!) = 0$.
Si $i+1-p \leq j \leq p-1$, on a $v_p(j!) = 0$ et $v_p((i-j)!) = 0$.

$ii)$ à l'aide de $i)$, un calcul direct montre le résultat pour $i=j$ et pour $j=0, i\geq 1$; de plus, la formule est vraie pour $i=1=j$. Pour les autres cas, on peut donc utiliser une récurrence double, grâce à la relation $\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}$.
$iii)$ Les cas $i=j$ sont immédiats, et pour $j=0$ on a $\binom{i+p}{p}=\frac{i\cdot(i-1)\dots(p+1)}{i!}\equiv 1$. On peut donc utiliser un argument de récurrence double pour conclure.
$iv)$ Si $i\geq 0$, on a

$$\frac{(i+p)!}{(i+p-j)!}=\frac{(i+p)\cdot(i+p-1)\dots(i+p-i+1)\cdot p!}{(i+p-j)\dots(i+p-j-(i-j)+1)p!}\equiv\frac{i!}{(i-j)!},$$

ce qui permet de conclure. $\sharp$

Rappelons que I_1 désigne le sous groupe d'Iwahori de K, défini comme les matrices de K qui sont unipotentes modulo p ; on a alors le résultat élémentaire suivant :

Lemme 5.5 *Soit σ une représentation lisse de KZ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Si σ^{I_1} est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et engendre σ en tant que KZ-représentation, alors σ est irréductible.*

Preuve : Soit $0\neq\sigma'\leq\sigma$ une sous-représentation. D'après la proposition 5.1, comme I_1 est un pro-p-groupe, on a $\sigma'^{I_1}\neq 0$. Enfin, comme σ^{I_1} est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et engendre σ, on en déduit que $\sigma'=\sigma$. $\sharp$

5.3 La preuve du lemme

Soit $p+2\leq k\leq 2p$, et considérons le sous $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel σ de σ_{k-2} engendré par :

$$\sigma\overset{\text{def}}{=}\langle X^{k-2},X^{k-3}Y,\dots,X^pY^{k-2-p},\widehat{X^{p-1}Y^{k-1-p}},\dots,\widehat{X^{k-1-p}Y^{p-1}},X^{k-2-p}Y^p,\dots,XY^{k-3},Y^{k-2}\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$$

où la notation $\widehat{X^{k-2-i}Y^i}$ signifie que l'on a enlevé l'élément $X^{k-2-i}Y^i$ du système de générateurs de σ.

Lemme 5.6 *Le sous-espace $\sigma\leq\sigma_{k-2}$ est une sous-KZ-représentation de σ_{k-2}.*

Preuve : Il s'agit de vérifier que σ est stable sous l'action de KZ. On va donc étudier

$$g\overset{\text{def}}{=}\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot X^{k-2-\alpha}Y^\alpha=(aX+cY)^{k-2-\alpha}(bX+dY)^\alpha$$

avec $g\in KZ$, et $0\leq\alpha\leq k-2-p$ ou bien $p\leq\alpha\leq k-2(\leq 2p-2)$. Pour fixer les idées, supposons que $p\leq\alpha\leq k-2$ (l'autre cas est identique) ; considérons

$$(bX+dY)^\alpha=\sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}(bX)^{k-2-\alpha-i}(dY)^i.$$

Si $p \leq \alpha \leq 2p-2$ et $\alpha - p + 1 \leq i \leq p-1$, alors $\binom{\alpha}{i} \equiv 0$; donc

$$(bX + dY)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\alpha-p} \binom{\alpha}{i} (bX)^{\alpha-i}(dY)^i + \sum_{i=p}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (bX)^{\alpha-i}(dY)^i.$$

On voit aussitôt que le degré en Y des monômes qui apparaissent dans le développement de $g{\cdot}X^{k-2-\alpha}$ est dans $\{0, 1, \ldots, k-2-p, p, \ldots, k-2\}$. $\sharp$

Considérons la représentation quotient du groupe KZ

$$\sigma_{k-2}/\sigma = \langle \overline{X^{p-1}Y^{k-1-p}}, \ldots, \overline{X^{k-1-p}Y^{p-1}} \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}{}^{1}.$$

Lemme 5.7 *Le sous espace I_1-invariant de σ_{k-2}/σ est*

$$(\sigma_{k-2}/\sigma)^{I_1} = \langle \overline{X^{p-1}Y^{k-p-1}} \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}.$$

Preuve : Soit $0 \leq l \leq 2p-k$. Étudions

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overline{X^{p-1-l}Y^{k-1-p+l}} &= \overline{X^{p-l-1}} \sum_{j=0}^{k-1-p+l} \binom{k-1-p+l}{j} (xX)^{l+k-p-1-j} Y^j \\
&= \sum_{i=k-1-p}^{k-1-p+l} \underbrace{\binom{k-1-p+l}{j} x^{k-1-p-j+l}}_{\alpha_{j,l}} \overline{X^{k-2-j}Y^j}.
\end{aligned}$$

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2p-k})$ un $(2p-k+1)$(-uplet d'éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui définit un élément I_1-invariant de σ_{k-2}/σ. On a

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \sum_{l=0}^{2p-k} \lambda_l \overline{X^{p-1-l}Y^{k-1-p+l}} = \sum_{l=0}^{2p-k} \lambda_l \overline{X^{p-1-l}Y^{k-1-p+l}}$$

ce qui donne (d'après un réordonnement des indices)

$$\sum_{j=0}^{2p-k} \overline{X^{p-1-j}Y^{j+l-1-p}} \sum_{l=j}^{2p-k} \alpha_{j+k-1-p,l}\lambda_l = \sum_{l=0}^{2p-k} \lambda_l \overline{X^{p-1-l}Y^{k-1-p+l}}.$$

En posant $\alpha'_{i,l} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{k-1-p+i,l}$, on trouve que le $2k-p+1$-uplet $\underline{\lambda}$ définit un vecteur I_1-stable ssi $\underline{\lambda}$ est valeur propre de la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha'_{0,0} & \alpha'_{0,1} & \cdots & \alpha'_{0,2p-k} \\ 0 & \alpha'_{1,1} & \cdots & \alpha'_{1,2p-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha'_{2p-k,2p-k}. \end{bmatrix}$$

[1]comme d'habitude, si $v \in \sigma_{k-2}$, on note $\overline{v} \in \sigma_{k-2}/\sigma$ sa réduction modulo σ.

On a alors que $\alpha'_{l,l} = 1$ pour tout $l = 0, \ldots 2p-k$. De plus, $\alpha'_{l,l+1} = (k-p+l)x \neq 0$ si $k < 2p$, $x \neq 0$, et $0 \leq l \leq 2p-k-1$ (si $k = 2p$ alors σ_{k-2}/σ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, et il n'y a rien à prouver).
On conclut que la matrice précédente possède une unique valeur propre (égale à 1) et que l'espace propre correspondant est de dimension 1. Il suit que $(\sigma_{k-2}/\sigma)^{I_1}$ est de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et est engendré par $\overline{X^{p-1}Y^{k-p-1}}$. ♯

Lemme 5.8 *La KZ-représentation σ_{k-2}/σ est cyclique, engendrée par $\overline{X^{p-1}Y^{k-p-1}}$.*

Preuve : Notons d'abord que

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \overline{X^{p-1}Y^{k-p-1}} \quad = \quad \sum_{j=0}^{k-2} \gamma_j \overline{X^{k-2-j}Y^j}$$

où

$$\gamma_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{i-j}\beta_j; \quad \alpha_j \stackrel{\text{def}}{=} \tbinom{p-1}{j} a^{p-1-j}c^j; \quad \beta_j \stackrel{\text{def}}{=} \binom{k-p-1}{j} b^{k-1-p-j}d^j.$$

En particulier, pour $x \in \mathbb{F}_p$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overline{X^{p-1}Y^{k-1-p}} \quad = \quad \sum_{j=k-1-p}^{p-1} \binom{k-1-p}{j} x^{k-2-j} \overline{X^{k-2-j}Y^j}$$

et $\binom{k-1-p}{j} \neq 0$ dans $\mathbb{F}_p$ dans ce contexte. En posant $v_j \stackrel{\text{def}}{=} \binom{k-p-1}{j} \overline{X^{k-2-j}Y^j}$, on voit que la sous-représentation de σ_{k-2}/σ engendrée par $\overline{X^{p-1}Y^{k-p-1}}$ contient des éléments de la forme

$$\{ \sum_{j=0}^{2p-k} x^j v_{j+k-1-p}\,,\; x \in \mathbb{F}_p^{\times} \}.$$

Une telle famille contient bien une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de σ_{k-2}/σ, grâce à des considérations de type "Van der Monde". ♯

D'après le lemme 5.5, σ_{k-2}/σ est une représentation irréductible de KZ (de dimension $2p-k+1$) avec action triviale de p ; donc, d'après la proposition 5.2, isomorphe à $\sigma_{2p-k} \otimes \omega^l \circ \det$ pour $0 \leq l < p-1$. Pour déterminer l'entier l on utilise un procédé identique à la preuve du lemme 4.2. En d'autre termes, un isomorphisme

$$\sigma_{k-2}/\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma_{2p-k} \otimes \omega^l \circ \det$$

induit un isomorphisme de H-représentations $(\sigma_{k-2}/\sigma)^{I_1} \cong (\sigma_{2p-k} \otimes \omega^l \circ \det)^{I_1}$ où

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in KZ \text{ t.q. } g \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \text{mod}(p)\, \exists x \in \mathbb{F}_p\}.$$

Comme on connaît déjà $(\sigma_{k-2}/\sigma)^{I_1} = \langle\overline{X^{p-1}Y^{k-p-1}}\rangle$, $(\sigma_{2p-k}\otimes\omega^l\circ\det)^{I_1} = \langle X^{2p-k}\rangle$, on conclut facilement que $l = k-1-p$.

Dans la suite, on s'intéresse à une écriture explicite du morphisme $\sigma_{k-2} \to \sigma_{2p-k}\otimes\omega^{k-1-p}\circ\det$ donnée par

$$\begin{tikzcd} \sigma_{k-2} \arrow[d, two heads] \arrow[dr, dotted, "\psi"] & \\ \sigma_{k-2}/\sigma \arrow[r, "\sim"] & \sigma_{2p-k}\otimes\omega^{k-1-p}\circ\det . \end{tikzcd}$$

Lemme 5.9 *Le morphisme $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire $\psi : \sigma_{k-2} \to \sigma_{2p-k}\otimes\omega^{k-1-p}\circ\det$ est donné par :*

$$\psi(X^{k-2-i}Y^i) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^{k-i}\binom{2p-k}{p+1-k+i}X^{p-1-i}Y^{p-k+1+i} & \text{si}\, k-1-p \le i \le p-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Considérons $X^{k-2-i}Y^i \in \sigma_{k-2}$ pour $k-1-p \le i \le p-1$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in K$ avec $\overline{d} \in \mathbb{F}_p$ racine primitive $(p-1)$-ième de l'unité. Donc

$$X^{k-2-i}Y^i \quad \mapsto \quad \sum_{j=0}^{2p-k}\lambda_j X^{2p-k-j}Y^j$$

avec $\lambda_j \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non tous nuls. Comme on a un morphisme de représentations, on déduit facilement :

$$d^i\sum_{j=0}^{2p-k}\lambda_j X^{2p-k-j}Y^j \quad = \quad d^{k-1-p}\sum_{j=0}^{2p-k}\lambda_j d^j X^{2p-k-j}Y^j .$$

Comme les λ_j ne sont pas tous nuls, on conclut que $\lambda_j = 0$ pour tout indice j sauf un et un seul, disons j_0, avec la propriété que $d^{j_0+k-1-p} = d^i$.
Il suit aussitôt que l'on a un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{k-2} & \to & \sigma_{2p-k}\otimes\omega^{k-1-p}\circ\det \\ X^{k-2-i}Y^i & \mapsto & c(i,k)X^{p-1-i}Y^{p+1-k+i} \end{array}$$

avec $c(i,k) \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $c(i,k) = 0$ si $0 \le i < k-1-p$ ou $p-1 < i \le k-2$. De plus, quitte à multiplier le morphisme pour une constante, on peut supposer $c(k-1-p,k) = 1$. Afin de chercher la valeur de la constante $c(i,k)$, considérons

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{p-1}Y^{k-p-1} \mapsto$$
$$\sum_{j=k-p-1}^{p-1}\gamma_j c(j,k)X^{p-1-j}Y^{p-k+1+j} = \sum_{j=0}^{2p-k}\gamma_{j+k-p-1}c(j+k-p-1,k)X^{2p-k-j}Y^j$$

où les γ_j sont définis comme dans la preuve du lemme 5.8. Comme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{2p-k} = (ad-bc)^{k-1-p} \sum_{j=0}^{2p-k} \binom{2p-k}{j} a^{2p-k-j} c^j X^{2p-k-j} Y^j;$$

une comparaison donne donc

$$c(i,k)\gamma_i = \binom{2p-k}{i-k+p+1} a^{p-1-i} c^{i-k+p+1} (ad-bc)^{k-1-p}.$$

Si on prend la matrice $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ($x \in \mathbb{F}_p$), on a $\gamma_i = \binom{p-1}{i} x^{-i}$ et

$$c(i,k)\binom{p-1}{i} x^{-i} = \binom{2p-k}{i-k+p+1} x^{-i} (-1)^{k-1-p};$$

comme $\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i \bmod (p)$ si $0 \leq i \leq p-1$, on en déduit

$$c(i,k) = \binom{2p-k}{i-k+p+1} (-1)^{k-1-p-i}.$$

♯

On a finalement trouvé le résultat suivant : la suite de représentations suivante est exacte

$$0 \longrightarrow \sigma \longrightarrow \sigma_{k-2} \longrightarrow \sigma_{2p-k} \otimes \omega^{k-1-p} \circ \det \longrightarrow 0$$

$$X^{k-2-i} Y^i \longmapsto c(i,k) X^{p-1-i} Y^{p-k+1+i}$$

avec $c(i,k) = (-1)^{k-i-p-1} \binom{2p-k}{p+1+i-k}$ si $k-1-p \leq i \leq p-1$, $c(i,k) = 0$ sinon. Si, de plus, $k = p+2$, on voit aussitôt que $\sigma = \langle X^p, Y^p \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ et le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{F}}_p[X,Y]_1^h & \to & \sigma \\ X & \mapsto & X^p \\ Y & \mapsto & Y^p \end{array}$$

est bien un isomorphisme de KZ-représentations.

Venons à la deuxième partie du résultat annoncé, c'est-à-dire la décomposition de la représentation σ en deux composantes irréductibles. Dorénavant, on suppose $k \geq p+3$.
Considérons la sous-KZ-représentation η de σ engendrée par $X^{k-3}Y - X^{k-2-p}Y^p$.

Lemme 5.10 *La sous-représentation η est décrite par :*

$$\eta = \langle v_i \stackrel{\text{def}}{=} X^{k-2-i}Y^i - X^{k-1-p-i}Y^{p-1+i}\,, 1 \le i \le k-2-p\rangle_{\mathbb{F}_p}.$$

Preuve : Considérons $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$; il s'agit d'étudier

$$\begin{aligned} & g\cdot(X^{k-3}Y - X^{k-2-p}Y^p) = \\ & (\sum_{j=0}^{k-3}\binom{k-3}{j}a^{k-3-j}c^jX^{k-3-j}Y^j)(bX+dY) - \\ & -(\sum_{j=0}^{k-2-p}\binom{k-2-p}{j}a^{k-3-j}c^jX^{k-2-p-j}Y^j)(bX^p+dY^p). \end{aligned} \tag{5.1}$$

À l'aide du lemme 5.4, on voit aussitôt que :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-3}\binom{k-3}{j}a^{k-3-j}c^jX^{k-3-j}Y^j \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^{k-p-3}\binom{k-3}{j}a^{k-3-j}c^jX^{k-3-j}Y^j + \sum_{j=0}^{k-3-p}\binom{k-3-p}{j}a^{k-4}c^{j+1}X^{k-3-j-p}Y^{j+p}. \end{aligned}$$

Maintenant, en développant (5.1), et en regroupant les puissances convenables de $X^{k-2-j}Y^j$ et $X^{k-2-j-p}Y^{j+p}$, (avec $j \in \{0,\dots,k-2-p\}$) on obtient

$$\sum_{j=1}^{k-p-2} X^{k-2-j}Y^ja^{k-3-j}c^{j-1}\alpha_j + \sum_{j=0}^{k-p-3} X^{k-2-j-p}Y^{j+p}a^{k-4-j}c^j\beta_j$$

où $\alpha_j \stackrel{\text{def}}{=} \binom{k-3}{j}cb + \binom{k-3}{j-1}ad - \binom{k-2-p}{j}cb$ et $\beta_j \stackrel{\text{def}}{=} \binom{k-3-p}{j}cb + \binom{k-3-p}{j-1}ad - \binom{k-2-p}{j}ad$.
À l'aide du 5.4-*iv*) on vérifie alors que $\alpha_j \equiv \binom{k-3}{j-1}\det(g)$ et $\beta_j \equiv -\binom{k-3}{j}\det(g)$ d'où (si $a \neq 0$) :

$$g\cdot(X^{k-3}Y - X^{k-2-p}Y^p) \quad = \quad \det(g)a^{k-4}\sum_{j=1}^{k-2-p}(a^{-1}c)^{j-1}\binom{k-3}{j-1}v_j$$

où $v_j \stackrel{\text{def}}{=} X^{k-2-j}Y^j - X^{k-1-p-j}Y^{p-1+j}$. La conclusion découle alors utilisant un argument "à la Van der Monde" : il suffit de disposer de $p-2$ éléments non nuls $a^{-1}c \in \mathbb{F}_p$, et remarquer le fait que $\prod_{j=1}^{k-2-p}\binom{k-3}{j-1} \neq 0$. ♯

Lemme 5.11 *Le sous-espace I_1-invariant de η est donné par*

$$\eta^{I_1} = \langle X^{k-3}Y - X^{k-2-p}Y^p\rangle_{\mathbb{F}_p}.$$

Preuve : Soit $\sum_{i=1}^{k-2-p}\lambda_i v_i \in \eta^{I_1}$, où $v_i \stackrel{\text{def}}{=} X^{k-2-i}Y^i - X^{k-1-p-i}Y^{p-1+i}$. Un calcul direct donne

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot v_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j - \sum_{j=0}^{p-1+i}\binom{p-1+i}{j}x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j - \sum_{j=1}^{i}\binom{p-1+i}{j}x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j - \sum_{j=p}^{p-1+i}\binom{p-1+i}{j}x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j.$$

Grâce au lemme 5.4-ii), on a

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^{k-2-p}\lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{k-2-p} v_j \sum_{i=j}^{k-2-p}\lambda_i \alpha_{i,j}$$

avec $\alpha_{i,j} = \binom{p-1+i}{p-1+j}x^{i-j}$; alors, avec les mêmes arguments que pour $(\sigma_{k-2}/\sigma)^{I_1}$, on conclut que $\eta^{I_1} = \langle v_1\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. $\sharp$

Comme précédemment, la représentation η est irréductible (de dimension $k-2-p$) et donc isomorphe à $\sigma_{k-3-p}\otimes\omega^l\circ\det$ pour $0 \le l < p-1$ convenable. Exactement avec la même technique utilisée pour σ_{k-2}/σ, on trouve que $l = 1$.

Lemme 5.12 *L'isomorphisme $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire $\phi_1 : \sigma_{k-3-p}\otimes\omega^l\circ\det \to \sigma_{k-2}$ est donné par :*

$$\phi_1(X^{k-3-p-i}Y^i) = X^{k-3-i}Y^{1+i} - X^{k-2-p-i}Y^{p+i},$$

pour $0 \le i \le k-p-3$.

Preuve : Études

$$\eta \xrightarrow{\sim} \sigma_{k-3-p}\otimes\omega\circ\det;$$

pour fixer les idées, $v_i \mapsto \sum_{j=0}^{k-3-p}\lambda_j X^{k-3-p-j}Y^j$ avec $\lambda_j \in \overline{\mathbb{F}}_p$, non tous nuls. En faisant agir $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ sur v_i (où $d \in \mathbb{F}_p$), on déduit (comme vu pour σ_{k-2}/σ) que

$$v_i \mapsto c(i,k)X^{k-2-p-i}Y^{i-1}$$

où $c(i,k) \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
Pour déterminer la valeur de la constante $c(i,k)$, étudions

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot v_1 =$$

$$\sum_{i=0}^{k-3-p}\binom{k-3}{i}x^iX^{k-3-i}Y^{i+1} + \sum_{i=p}^{k-3}\binom{k-3}{i}x^iX^{k-3-i}Y^{i+1} - \sum_{i=0}^{k-2-p}\binom{k-2-p}{i}x^iX^{k-2-p-i}Y^{i+p};$$

en réarrangeant les indices, on obtient enfin

$$\sum_{i=1}^{k-2-p} \binom{k-3}{i-1} x^{i-1} X^{k-2-i} Y^{i+1} - \sum_{i=1}^{k-2-p} (\binom{k-2-p}{i-1} - \binom{k-3}{i+p-2}) x^{i-1} X^{k-1-p-i} Y^{p-1+i}.$$

Grâce au lemme 5.4 on voit que

$$\binom{k-2-p}{i-1} - \binom{k-3}{i+p-2} \equiv \binom{k-3}{i-1} \bmod(p)$$

ce qui permet d'en déduire que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot v_1 \mapsto \sum_{i=1}^{k-2-p} \binom{k-3}{i-1} x^{i-1} c(i,k) X^{k-2-p-i} Y^{i-1} = \sum_{i=0}^{k-3-p} \binom{k-3}{i} x^i c(i+1,k) X^{k-3-p+i} Y^i.$$

Par ailleurs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot X^{k-3-p} = \sum_{i=0}^{k-3-p} \binom{k-3-p}{i} x^i X^{k-3-p-i} Y^i.$$

et donc, par identificaiton des coefficients

$$\binom{k-3}{i} x^i c(i+1,k) = \binom{k-3-p}{i} x^i.$$

Comme $\binom{k-3}{i} \equiv \binom{k-3-p}{i}$ (encore une fois, grâce au lemme 5.4), on conclut que $c(i,k) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, k-2-p$. ♯

Étudions la sous KZ-représentation ξ de σ engendrée par X^{k-2}.

Lemme 5.13 *La sous-KG-représentation ξ de σ engendrée par X^{k-2} est décrite par*

$$\xi = \langle w_j \, , \, 0 \leq j \leq k-1-p \rangle_{\mathbb{F}_p}$$

où l'on pose $w_j \overset{def}{=} \binom{k-2}{j} X^{k-2-j} Y^j + \binom{k-2}{p-1+j} X^{k-1-p-j} Y^{j+p-1}$.

Preuve : Un calcul direct donne

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{k-2} = \sum_{j=0}^{k-1-p} \binom{k-2}{j} a^{k-2-j} c^j X^{k-2-j} Y^j + \sum_{j=p-1}^{k-2} \binom{k-2}{j} a^{k-2-j} c^j X^{k-2-j} Y^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1-p} \binom{k-2}{j} a^{k-2-j} c^j X^{k-2-j} Y^j + \sum_{j=0}^{k-1-p} \binom{k-2}{p-1+j} a^{k-2-j} c^j X^{k-1-j-p} Y^{j+1-p} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1-p} a^{k-2-j} b^j w_j,$$

où l'on pose $w_j \stackrel{\text{def}}{=} \binom{k-2}{j} X^{k-2-j}Y^j + \binom{k-2}{p-1+j} X^{k-1-p-j}Y^{j+p-1}$. Grâce à un argument " à la Van der Monde", on conclut que

$$\xi = \langle w_j \, , \, 0 \leq j \leq k-1-p \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$$

♯

Lemme 5.14 *Les sous KZ-représentations ξ, η de σ_{k-2} sont disjointes : $\eta \cap \xi = \{0\}$.*

Preuve : Posons $a_i \stackrel{\text{def}}{=} X^{k-2-i}Y^i$, $b_i \stackrel{\text{def}}{=} X^{k-p-1-i}Y^{p-1+i}$, de telle sorte que l'on peut écrire $v_i = a_i - b_i$, $w_j = \binom{k-2}{j} a_j + \binom{k-2}{p-1+j} b_j$; prenons $\sum_{i=1}^{k-2-p} \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^{k-1-p} \mu_i w_i$ dans $\eta \cap \xi$. Une vérification immédiate donne :

$$\mu_0 = 0 = \mu_{k-1-p} \quad \lambda_i = \mu_i \binom{k-2}{i} \quad \lambda_i = -\mu_i \binom{k-2}{p-1+i}.$$

D'après la relation $\binom{k-2}{i} + \binom{k-2}{p-1+i} \equiv \binom{k-1-p}{i} \operatorname{mod}(p)$ (dont la vérification est plus en bas) et le fait que $\binom{k-1-p}{i} \neq 0 \operatorname{mod}(p)$, on conclut que $\mu_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, k-2-p$.

La vérification de la relation

$$\binom{k-2}{i} + \binom{k-2}{p-1+i} \equiv \binom{k-1-p}{i} \operatorname{mod}(p) \qquad \begin{cases} k = p+3, \ldots, 2p \\ i = 0, \ldots, k-1-p \end{cases}$$

vient encore une fois d'une récurrence double : les cas "de base" $k = p+3$, $i = 0, 1, 2$ peuvent être vérifiés à la main; le cas $i = 0$ et k arbitraire est aussi immédiat, et on utilise enfin une récurrence sur k, i, grâce à la relation $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha-1}{\beta} + \binom{\alpha-1}{\beta-1}$. ♯

On va vérifier que $\xi^{I_1} = \langle X^{k-2} \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Commençons par un calcul.

Lemme 5.15 *On a la relation*

$$\binom{k-2}{p-1+j}\left[\binom{k-2}{i}\binom{i}{j} + \binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{j}\right] \equiv \binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{p-1+j}\binom{k-2}{j} \operatorname{mod}(p)$$

pour $p+3 \leq k \leq 2p$, $0 \leq i \leq k-1-p$, $0 \leq j \leq i$.

Preuve : Les cas $j = k-1-p$, $i = k-1-p$ et $i = j$ sont des vérifications à la main, via le lemme 5.4. Dans la suite, on suppose $i, j < k-1-p$.
Un calcul donne

-) $\binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{j} = \binom{k-2}{j}\binom{k-2-j}{p-1+i-j}$;
-) $\binom{k-2}{i}\binom{i}{j} = \binom{k-2}{j}\binom{k-2-j}{k-2-i}$;

Il suit que la relation à vérifier est

$$\binom{k-2}{p-1+j}[\binom{k-2-j}{p-1+i-j}+\binom{k-2-j}{k-2-i}]\equiv\binom{k-2}{p-1+i}p-1-j \bmod(p).$$

Encore, d'après

$$\binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{p-1+j}=\binom{k-2}{p-1+j}\binom{k-1-p-j}{i-j},$$

on est donc ramené à monter que

$$\binom{k-1-p-j}{i-j}\equiv\binom{k-2-j}{p-1+i-j}+\binom{k-2-j}{k-2-i} \bmod(p)$$

pour $p+3\leq k\leq 2p$, $0\leq i<k-1-p$, $0\leq j<i$, $0\leq j<k-1-p$.
D'après le lemme 5.4, on a

$$\binom{a+p}{b+p}\equiv\binom{a}{b} \bmod(p)$$

et, comme $j<k-1-p$ $j<i$, on a

$$\binom{k-2-j}{p-1+i-j}\equiv\binom{k-2-j-p}{i-1-j} \bmod(p).$$

De même, d'après $j<k-1-p$ et $i<k-1-p$, on a

$$\binom{k-2-j}{k-2-i}\equiv\binom{k-2-j-p}{i-j}.$$

Enfin, on a

$$\binom{k-1-p-j}{i-j}=\binom{k-2-j-p}{i-j}\frac{k-1-p-j}{k-1-p-i}.$$

Il s'agit alors de voir que

$$\binom{k-2-j-p}{i-j}\frac{k-1-p-j}{k-1-p-i}\equiv\binom{k-2-j-p}{i-j-1}+\binom{k-2-j-p}{i-j};$$

mais

$$\binom{k-2-j-p}{i-j-1}=\binom{k-2-j-p}{i-j}\frac{i-j}{k-1-p-i}$$

et la conclusion est achevée. ♯

Lemme 5.16 *Le sous espace I_1-invariant de ξ est $\xi^{I_1}=\langle X^{k-2}\rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$.*

Preuve : Soit $v = \sum_{i=0}^{k-1-p} \lambda_i w_i \in \xi^{I_1}$, où $w_i \stackrel{\text{def}}{=} \binom{k-2}{i} X^{k-2-i}Y^i + \binom{k-2}{p-1+i} X^{k-1-p-i}Y^{p-1+i}$. étudions

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & 1 \end{array}\right] \cdot w_i = \binom{k-2}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^{i-j} X^{k-2-j}Y^j + \binom{k-2}{p-1+i} \sum_{j=0}^{p-1+i} \binom{p-1+i}{j} x^{i-j} X^{k-2-j}Y^j.$$

On a $\sum_{j=0}^{p-1+i} \binom{p-1+i}{j} x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j = \sum_{j=0}^{i} \binom{p-1+i}{j} x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j + \sum_{j=p-1}^{p-1+i} \binom{p-1+i}{j} x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j$ et un changement d'indice dans le deuxième terme de la somme permet alors d'écrire :

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & 1 \end{array}\right] \cdot w_i = \sum_{j=0}^{i} x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j [\binom{k-2}{i}\binom{i}{j} + \binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{j}] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{i} x^{i-j}X^{k-1-p-j}Y^{p-1+j} \binom{p-1-i}{p-1+j}\binom{k-2}{p-1+i}.$$

Si $j \neq 0, k-1-p$, alors $\binom{k-2}{p-1+j}\binom{k-2}{j} \neq 0$ dans $\mathbb{F}_p$, ce qui permet d'avoir

$$\sum_{j=1}^{i} x^{i-j}X^{k-2-j}Y^j [\binom{k-2}{i}\binom{i}{j} + \binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{j}] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{i} x^{i-j}X^{k-1-p-j}Y^{p-1+j} \binom{p-1-i}{p-1+j}\binom{k-2}{p-1+i} =$$
$$= \sum_{j=1}^{i} X^{k-2-j}Y^j \binom{k-2}{j} x^{i-j}\alpha_{ij} + \sum_{j=1}^{i} X^{k-1-p-j}Y^{p-1+j} \binom{k-2}{p-1+j} x^{i-j}\alpha_{ij} =$$
$$= \sum_{j=1}^{i} w_j x^{i-j}\alpha_{ij}$$

avec $\alpha_{ij} = \binom{k-2}{p-1+i}\binom{p-1+i}{p-1+j}(\binom{k-2}{p-1+j})^{-1}$. D'autre part, la situation pour $j = 0$ est donnée par

$$X^{k-2}x^i[\binom{k-2}{i} + \binom{k-2}{p-1+i}] \equiv w_0 x^i \alpha_{i,0}$$

où $\alpha_{i,0} = [\binom{k-2}{i} + \binom{k-2}{p-1+i}]$. Pour $j = k-1-p$, on retrouve Y^{k-2}, d'où $\alpha_{k-1-p,k-1-p} = 1$.
Par conséquent,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & x \\ 0 & 1 \end{array}\right] \cdot v = \sum_{j=0}^{k-1-p} w_j \sum_{i=j}^{k-1-p} x^{i-j}\alpha_{ij}\lambda_i = \sum_{j=0}^{k-1-p} \lambda_j w_j$$

et donc le $(k-p)$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1-p})$ est un vecteur propre de la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0}x & \dots & \alpha_{k-1-p,0}x^{k-1-p} \\ 0 & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{k-1-p,1}x^{k-2-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{k-1-p,k-1-p}. \end{bmatrix}$$

On vérifie que $\alpha_{i,i} = 1$: on a un seul valeur propre, égal à 1. De plus, on a $\alpha_{i+1,i} = k-1-p-i \neq 0 \bmod(p)$ pour $0 \leq i \leq k-2-p$ ce qui montre que l'espace propre associé à 1 est de dimension 1. On conclut que $\xi^{I_1} = \langle X^{k-2} \rangle_k$. ♯

Comme précédemment, le fait que $\xi^{I_1} = \langle X^{k-2} \rangle_k$ montre que ξ est irréductible et donc isomorphe à $\sigma_{k-1-p} \otimes \omega^l \circ \det$ pour un $l \in \{0, \dots, k-3-p\}$ convenable. Avec le procédé déjà vu pour σ_{k-2}/σ, on déduit que $l = 0$.

Lemme 5.17 *Le morphisme $\phi_2 : \sigma_{k-1-p} \to \sigma_{k-2}$ est décrit par :*

$$\phi_2(X^{k-1-p-i}Y^i) = (\binom{k-1-p}{i})^{-1}(\binom{k-2}{i}X^{k-2-i}Y^i + \binom{k-2}{p-1+i}X^{k-1-p-i}Y^{p-1+i})$$

par $0 \leq i \leq k-1-p$.

Preuve : Considérons :

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{\sim} & \sigma_{k-1-p} \\ w_i & \mapsto & c(k,i)X^{k-1-p-i}Y^i \end{array}$$

avec $c(k,i) \in \overline{\mathbb{F}}_p$ convenable. On peut supposer $c(k,0) = 1$. Pour déterminer $c(k,i)$ on utilise le procédé habituel :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{k-2} = \sum_{j=0}^{k-1-p} a^{k-2-j}c^j w_j \quad \mapsto \quad \sum_{j=0}^{k-1-p} a^{k-2-j}c^j c(k,j) X^{k-1-p-j}Y^j$$

et

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{k-1-p} = \sum_{j=0}^{k-1-p} a^{k-1-p-j}c^j \binom{k-1-p}{j} X^{k-1-p-j}Y^j$$

ce qui permet de conclure que $c(k,j) = \binom{k-1-p}{j}$. ♯

5.4 Vers une généralisation

On aimerait comprendre la décomposition de la représentation σ_k en représentations irréductibles lorsque $k \geq 2p-1$, et pour cela, on va utiliser un résultat qui apparaît dans l'article de Glover [8].
On commence par définir le sous-ensemble

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F}_p) \text{ t.q. } \det(g) = 0\} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{F}_p);$$

ensuite, posons

$$(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^* \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1} \text{ t.q. } n{\cdot}v = 0 \,\text{pour tout}\, n \in N\}.$$

Lemme 5.18 (Glover) *Soit $m \geq p+1$. Alors, on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels $(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^* = (X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-2-p}$, et un isomorphisme de KZ-représentations $(X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-2-p} \cong \sigma_{m-2-p} \otimes \omega \circ \det$.*

Preuve : Soit $t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$; un calcul donne

$$t{\cdot}(X^pY - XY^p) = \det(t)(X^pY - XY^p),$$

ce qui permet de conclure que :
- les KZ-représentations $\omega \circ \det$ et $\langle X^pY - XY^p \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p} \leq \sigma_{p+1}$ sont isomorphes ;
- que $(X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-p-2}$ est un sous $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de $(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$;
- les KZ-représentations $(X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-p-2}$ et $\sigma_{m-p-2} \otimes \omega \circ \det$ sont isomorphes.

Il ne reste qu'à montrer l'égalité $(X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-p-2} = (\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$, et pour cela, il suffit d'établir l'inégalité $\dim_k(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*) \geq p+2$.
Ceci est une vérification à la main : on va montrer que $\{X^{m-1}, X^{m-2}Y, \ldots, X^{m-p-1}Y^p\} \cup \{Y^{m-1}\}$ est une famille $\overline{\mathbb{F}}_p$-libre dans le quotient $(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*)$.
Supposons donc $w \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^{m-1-i}Y^i + a_pY^{m-1} \in (\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$, avec les $a_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$ non tous nuls. Un calcul immédiat donne :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {\cdot} w = a_pY^{m-1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {\cdot} w = a_0X^{m-1}$$

ce qui implique $a_0 = a_p = 0$. Soit $n \in \{1, \ldots, p-1\}$ le plus petit entier tel que $a_n \neq 0$; comme

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot = X^{m-1} \sum_{i=n}^{p-1} a_i b^i$$

on en déduit $\sum_{i=n}^{p-1} a_i b^i = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $b \in \mathbb{F}_p^*$, on trouve :

$$(p-1)a_n = -\sum_{b \in \mathbb{F}_p^*} \sum_{i=n+1}^{p-1} a_i b^{i-n} = \sum_{i=n+1}^{p-1} a_i \sum_{b \in \mathbb{F}_p^*} b^{i-n}.$$

Mais cela conduit à une contradiction, dés que $1 \leq i-n \leq p-2$ d'où $\sum_{b \in \mathbb{F}_p^*} b^{i-n} = 0$ pour tout $i = n+1, \ldots, p-1$.♯

À l'aide du lemme 5.18 on montre la

Proposition 5.3 (Glover) *Soit $m \geq 2p$. Écrivons $m = k+j(p-1)$, avec $j \geq 0$ et $p+1 \leq k \leq 2p-1$. Alors, on a un isomorphisme de KZ-représentations*

$$\sigma_{m-1}/(\sigma_{m-p-2} \otimes \omega \circ \det) \cong \sigma_{k-1}/(\sigma_{k-p-2} \otimes \omega \circ \det).$$

Preuve : Définissons le morphisme $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \psi : \sigma_{k-1} & \to & \sigma_{m-1} \\ X^i Y^{k-1-i} & \mapsto & \begin{cases} X^{m-k+i} Y^{k-i-1} & \text{si}\, i \geq 1 \\ Y^{m-1} & \text{si}\, i = 0. \end{cases} \end{array}$$

D'abord, notons que $\psi(XX^iY^{k-2-i}) = X^{m-k}(XX^iY^{k-2-i})$ et que $\psi(Y^{k-1}) = Y^{m-k}Y^{k-1}$. D'après le lemme 5.18 on a un isomorphisme de KZ-modules $\sigma_{k-1} \otimes \omega \circ \det \cong (X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-p-2}$ et la caractérisation de ce sous $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace de $\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1}$ en termes de l'ensemble N introduit précédemment (idem par rapport à $\sigma_{m-p-2} \otimes \omega \circ \det$).
On a donc que

$$\psi((X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-p-2}) = (X^pY - XY^p)X^{m-k}\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-p-2} \leq (X^pY - XY^p)\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-p-2}$$

ce qui permet d'avoir une factorisation de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, two heads] & \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1} \arrow[d, two heads] \\ \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1})^* \arrow[r, dotted, "\exists!", "\overline{\psi}"'] & \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*. \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\overline{\psi}$ est surjective ; en effet, on a vu dans le lemme 5.18 qu'une base de $\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$ est donnée par $\{\overline{X^{m-1}}, \overline{X^{m-2}Y}, \dots, \overline{X^{m-1-p}Y^p}, \overline{Y^{m-1}}\} = \{\overline{\psi(X^{k-1})}, \dots, \overline{\psi(Y^{k-1})}\}$. Comme les espace quotients $\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1})^*$ et $\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1}/(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$ ont même dimension, on conclut que $\overline{\psi}$ est un isomorphisme.
Il ne reste qu'à montrer que le morphisme $\overline{\psi}$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-équivariant. Cela revient à dire que $\psi(g{\cdot}u) - g{\cdot}\psi(u) \in (\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, $u \in \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-1}$. D'après la caractérisation de l'espace $(\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{m-1})^*$, cela est équivalent à demander que $t{\cdot}(\psi(g{\cdot}u) - g{\cdot}\psi(u)) = 0$ pour tout $t \in N$. Comme toutes les actions sont $\overline{\mathbb{F}}_p$-linéaires, il suffit de montrer l'égalité précédente séparément pour $u \in X\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-2}$ et $u = Y^{k-1}$.

Écrivons $g{\cdot}u = Xu_2 + aY^{k-1}$ avec $u_2 \in \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-2}$; $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $t \in N$, $t \neq 0$; donc $t{\cdot}\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_1 = \langle v \rangle_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ pour un $v \in \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_1 \setminus \{0\}$ convenable, ce qui donne, pour $r \geq 1$, $t{\cdot}\overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{r-1} = \langle v^{r-1} \rangle_{\overline{fp}}$ dés que

$$t{\cdot}(X^iY^{r-1-i}) = (t{\cdot}X)^i(t{\cdot}Y)^{k-1-i}.$$

Écrivons $t{\cdot}X = bv$; $t{\cdot}Y = cv$; $t{\cdot}(g{\cdot}X) = dv$; $t{\cdot}(g{\cdot}u_1) = ev^{k-2}$; $t{\cdot}u_2 = fv^{k-2}$ pour des scalaires $b, c, d, e, f, \in \overline{\mathbb{F}}_p$.
i) Soit $u = Xu_1$ avec $u_1 \in \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]^h_{k-2}$. Alors, on a :

$$t{\cdot}(g{\cdot}u) = (t{\cdot}(g{\cdot}X))(t{\cdot}(g{\cdot}u_1)) = dev^{k-1}$$

et

$$t{\cdot}(g{\cdot}u) = t{\cdot}(Xu_2 + aY^{k-1}) = (bf + ac^{k-1})v^{k-1}$$

ce qui implique, dés que $k \equiv m \bmod (p-1)$, que $de = bf + a^{m-1}$. On a de plus :

$$\begin{aligned} t{\cdot}(\psi(g{\cdot}u)) &= t{\cdot}(\psi(Xu_2 + aY^{k-1})) = t{\cdot}(X^{m-k}(Xu_2 + aY^{m-1})) = (b^{m-k-1}f + ac^{m-1})v \\ t{\cdot}(g{\cdot}\psi(u)) &= t{\cdot}(g{\cdot}(X^{m-k}(Xu_1))) = d^{m-k}dev^{m-1} \end{aligned}$$

et on conclut, encore grâce à la congruence $k \equiv m \bmod (p-1)$.
ii) Soit $u = Y^{k-1}$. Écrivons, de plus, $t{\cdot}(g{\cdot}u) = lv$ avec $l \in \overline{\mathbb{F}}_p$. On a $t{\cdot}(g{\cdot}u) = l^{k-1}v^{k-1}$ et $t{\cdot}(g{\cdot}u) = t{\cdot}(Xu_2 + aY^{k-1}) = (bf + ac^{k-1})v^{k-1}$, d'où $bf + ac^{m-1} = g^{m-1}$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} t{\cdot}(\psi(g{\cdot}u)) &= t{\cdot}(\psi(Xu_2 + aY^{k-1})) = t{\cdot}(X^{m-k}Xu_2 + aY^{m-1}) = (b^{m-k+1}f + ac^{m-1})v^{m-1} \\ t{\cdot}(g{\cdot}\psi(u)) &= t{\cdot}(g{\cdot}Y^{m-1}) = l^{m-1}v^{m-1} \end{aligned}$$

et on conclut.♯

5.5 Conclusion

On va résumer ce que l'on sait à ce point sur les facteurs de σ_k.
i) Si $k = p$, on a une suite exacte de KZ-représentations (irréductibles)

$$0 \to \sigma_1 \to \sigma_p \to \sigma_{p-2} \otimes (\omega \circ \det) \to 0.$$

ii) Si $p + 1 \leq k \leq 2p - 2$ on a

$$0 \to (\sigma_{k-1-p} \otimes \omega \circ \det) \oplus \sigma_{k+1-p} \to \sigma_k \to \sigma_{2p-2-k} \otimes \omega^k \circ \det \to 0$$

iii) Si $k \geq 2p - 1$, écrivons $k = k_0 + j(p-1)$ avec $p \leq k_0 \leq 2p - 2$ (l'écriture étant unique) ; on obtient

$$\sigma_k/(\sigma_{k-p-1} \otimes \omega \circ \det) \xrightarrow{\sim} \sigma_{k_0}/(\sigma_{k_0-p-1} \otimes \omega \circ \det).$$

Notre but est de trouver une généralisation du *ii*) dans le cas $k \geq 2p - 1$; le premier pas consiste à trouver les facteurs de Jordan-Hölder de la représentation σ_k.

Cela vient d'une récurrence finie ; en effet, écrivons $k = k_0 + j(p-1)$. D'après la proposition 5.3, on a une suite exacte

$$0 \to \sigma_{k-(p+1)} \otimes \omega \circ \det \to \sigma_k \to \sigma_{k_0}/(\sigma_{k_0-(p+1)} \otimes \omega \circ \det) \to 0;$$

et les facteurs de Jordan-Hölder de $\sigma_{k_0}/(\sigma_{k_0-(p+1)} \otimes \omega \circ \det)$ sont σ_{k_0+1-p} et $\sigma_{2p-2-k_0} \otimes \omega^{k_0+1-p} \circ \det$, connus (lemme 5.3).
De plus, les facteurs de $\sigma_{k-(p+1)} \otimes \omega \circ \det$ sont les représentations $M \otimes \omega \circ \det$ avec M facteur de $\sigma_{k-(p+1)}$: en effet, $\bullet \otimes \omega \circ \det$ est un foncteur exact, et $M \otimes \omega \circ \det$ est irréductible dès que M est irréductible et $\omega \circ \det$ est de dimension 1.

Par une récurrence finie, on obtient le résultat suivant

Proposition 5.4 *Soient* $k \geq 2p-1$, $n \overset{def}{=} \max\{l \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad k - n(p+1) \geq p\}$ *et* $\kappa \overset{def}{=} k - n(p+1)$.
Alors, les facteurs de Jordan-Hölder de la représentation σ_k *sont les* $2(n+1)$ *facteurs de la forme*

$$\sigma_{\alpha_j+1-p} \otimes \omega^j \circ \det; \qquad \sigma_{2p-2-\alpha_j} \otimes \omega^{\alpha_j+j}$$

pour $0 \leq j \leq n$, *où* $\alpha_j \in \{p, \ldots, 2p-2\}$ *est défini par la condition* $k - j(p+1) \equiv \alpha_j \; mod(p-1)$ *; si* $\kappa \neq p$, *il faut ajouter le facteur* $\sigma_{\kappa-(p+1)} \otimes \omega^{n+1} \circ \det$ *à cette liste.*

Preuve : Vue plus haut.♯

Voyons le cas $p = 2$. Alors (lemmes 4.2 et 4.3) les seules représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sont σ_1 et le caractère trivial *triv*. Soient n, κ comme dans la proposition 5.4. On a $\alpha_j = 2$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ (notations de la proposition 5.4) et on a
-) n facteurs de la forme σ_1 ;
-) n facteurs de la forme *triv* ;
-) un autre facteur de la forme σ_1 (resp. *triv*) si $\kappa - 3 = 1$ (resp. si $\kappa - 3 = 0$).

Considérons le problème suivant : soient $\alpha \in \{0, \ldots, p-1\}$ et $j_0 \in \{0, \ldots, p-2\}$; quelle est la multiplicité du poids $\sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0}$ en tant que facteur de σ_k ?
D'abord, il s'agit de compter les $j \in \{0, \ldots, n\}$ tels que l'on ait $\sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0} \cong \sigma_{\alpha_j+1-p} \otimes \omega^j$ i.e. étudier

$$j \in \{0, \ldots, n\} \quad \text{tels que} \quad \left\{ \begin{array}{l} j \equiv j_0 \bmod(p-1) \\ \alpha = \alpha_j + 1 - p. \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Notons que le système (5.2) la condition nécessaire $k - 2j_0 - \alpha \equiv 0 \bmod(p-1)$. Fixons $j \in \{0, \ldots, n\}$ avec $j \equiv j_0 \bmod(p-1)$. Si $\alpha + (p-1) \in \{p, \ldots, 2p-2\}$, on a alors $\alpha_j = \alpha + (p-1)$ (dés que $\alpha + (p-1) \equiv k - 2j \bmod (p-1)$). Dans ce cas on a trouvé

$$\mathrm{Card}(\{0, \ldots, n\} \cap \{j_0 + l(p-1),\ l \in \mathbb{N}\}) = \left[\frac{n - j_0}{p-1}\right] + 1$$

facteurs.
Si $\alpha + (p+1) \notin \{p, \ldots, 2p-2\}$ alors $\alpha = 0$ et le système (5.2) n'a pas de solution.

Il faut maintenant compter les $j\{0, \ldots, n\}$ tels que $\sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0} \cong \sigma_{2p-2-\alpha_j} \otimes \omega^{\alpha_j + j}$, c'est-à-dire :

$$j \in \{0, \ldots, n\} \quad \text{tels que} \quad \begin{cases} \alpha + \alpha_j = 2(p-1) \\ j_0 \equiv \alpha_j + j \bmod (p-1). \end{cases} \tag{5.3}$$

Prenons d'abord $j \in \{0, \ldots, n\}$ avec $j \equiv j_0 + \alpha \bmod (p-1)$. D'après les conditions $\alpha_j \equiv k - 2j \bmod (p-1)$ et $\alpha + \alpha_j \equiv 0 \bmod (p-1)$ on retrouve la condition nécessaire $k - 2j_0 - \alpha \equiv 0 \bmod (p-1)$.
Si $2(p-1) - \alpha \in \{p, \ldots, 2p-2\}$ alors $\alpha_j = 2(p-1) - \alpha$, dés que

$$2(p-1) - \alpha = k - 2j_0 - 2\alpha + \left(\frac{2j_0 - k + \alpha}{p-1} + 2\right)(p-1) \equiv k - 2j \bmod (p-1).$$

Donc, dans ce cas, on a trouvé autres

$$\mathrm{Card}(\{0, \ldots, n\} \cap \{(j_0 + \alpha)_0 + l(p-1),\ l \in \mathbb{N}\}) = \left[\frac{n - (j_0 + \alpha)_0}{p-1}\right] + 1$$

facteurs, où $(j_0 + \alpha)_0 \in \{0, \ldots, p-2\}$ est déterminé par la condition $j_0 + \alpha \equiv (j_0 + \alpha)_0 \bmod (p-1)$.
Si enfin $2(p-1) - \alpha \notin \{p, \ldots, 2p-2\}$, alors $\alpha = p-1$ et le système (5.3) n'a pas de soluion.

On résume ces résultats dans la

Proposition 5.5 *Soient $\alpha \in \{0, \ldots, p-1\}$, $j_0 \in \{0, \ldots, p-2\}$ et $k \geq 2p-1$ des entièrs, κ défini comme dans la proposition* 5.4. *Définissons :*

$$m(k, \alpha, j_0) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 \text{ si } k - 2j_0 - \alpha \neq 0 \bmod (p-1); \\ \left[\frac{n-j_0}{p-1}\right] + 1 + \left[\frac{n-(j_0+\alpha)_0}{p-1}\right] + 1 \\ \qquad \text{si } k - 2j_0 - \alpha \equiv 0 \bmod (p-1),\ \alpha \notin \{0, p-1\}; \\ \left[\frac{n-j_0}{p-1}\right] + 1 \text{ si } k - 2j_0 - \alpha \equiv 0 \bmod (p-1),\ \alpha = 0; \\ \left[\frac{n-j_0}{p-1}\right] + 1 \text{ si } k - 2j_0 - \alpha \equiv 0 \bmod (p-1),\ \alpha = p-1. \end{cases}$$

(où $(j_0 + \alpha)_0 \in \{0, \ldots, p-2\}$ est défini par la condition $j_0 + \alpha \equiv (j_0 + \alpha)_0 \bmod (p-1)$).

Si $\sigma_{k-1-p} \otimes \omega^{n+1} \ncong \sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0}$*, alors le nombre des facteurs de Jordan-Hölder de* σ_k *isomorphes à* $\sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0}$ *est* $m(k, \alpha, j_0)$.
Si $\sigma_{k-1-p} \otimes \omega^{n+1} \cong \sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0}$*, alors le nombre des facteurs de Jordan-Hölder de* σ_k *isomorphes à* $\sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0}$ *est* $m(k, \alpha, j_0) + 1$.

Exemple 5.1 On déttaille, à l'aide du procédé précédent, un exemple qui apparaît dans [4]. Soit $p \geq 5$, $k \in \{6, \dots, p+1\}$ pair et definissons $n_k \stackrel{\text{def}}{=} (\frac{k}{2} - 1)(p+1) - k$; le but est d'etudier les facteurs de σ_{n_k}.

On va chercher le plus grand entier n tel que l'on ait

$$n_k - n(p+1) \geq p;$$

un calcul élémentaire montre que $n = \frac{k}{2} - 3$; de plus, on vérifie que $\kappa - (p+1) \geq 0$. La première conclusion est donc la suivante :

$i)$ On a $\frac{k}{2} - 2$ facteurs de la forme

$$\sigma_{\alpha_j+1-p} \otimes \omega^j \ , \sigma_{2p-2-\alpha_j} \otimes \omega^{\alpha_j+j}$$

où $j \in \{0, \dots, \frac{k}{2} - 3\}$, $\alpha_j \in \{p, \dots, 2p-2\}$ definit par $n_k - 2j \equiv \alpha_j \mathrm{mod}(p-1)$;

$ii)$ le facteur

$$\sigma_{p+1-k} \otimes \omega^{\frac{k}{2}-2}.$$

Pour $\alpha \in \{p, \dots, 2p-2\}$, $j_0 \in \{0, \dots, p-2\}$ on se propose d'étudier la multiplicité de $\sigma_\alpha \otimes \omega^{j_0}$ en tant que facteur de σ_{n_k}.
D'abord, on note que la condition $n_k - 2j_0 - \alpha \equiv 0 \,\mathrm{mod}(p-1)$ entraîne la condition $\alpha = 2l$ pour $l \in \{0, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. De plus, d'après $n_k - 2j_0 - 2l \equiv 0 \,\mathrm{mod}(p-1)$, on trouve $j_0 \equiv (-1-l) \,\mathrm{mod}(\frac{p-1}{2})$ ce qui montre que

$$j_0 \in \{-1 - l + \frac{p-1}{2}; -1 - l + (p-1)\} \quad \text{si} \quad l \neq \frac{p-1}{2}$$
$$j_0 \in \{\frac{p-1}{2} - 1; p-2\} \quad \text{si} \quad l = \frac{p-1}{2}.$$

Fixons donc $l \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, et soit $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} 2l$.

Cas 1 : soit $j_0 = -1 - l + \frac{p-1}{2}$. Il s'agit d'abord d'étudier (la partie entière de)

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n - j_0}{p-1} = \frac{\frac{k}{2} - 2 - \frac{p-1}{2} + l}{p-1};$$

on en déduit que $0 \leq t < 1$ si $\frac{p-1}{2} + 2 - \frac{k}{2} \leq l$, $-1 \leq t < 0$ sinon.
Avec les notations de la proposition 5.4, on vérifie que $(j_0 + \alpha)_0 = \frac{p-1}{2} - 1 + l$.
Il s'agit donc d'étudier (la partie entière de)

$$t' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n - (j_0 + \alpha)_0}{p-1} = \frac{\frac{k}{2} - 2 - \frac{p-1}{2} - l}{p-1};$$

dans ce cas on voit que $-1 \leq t' < 0$.

Cas 2 soit $j_0 = -1-l+(p-1)$. Il s'agit d'abord d'étudier (la partie entière de)

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-j_0}{p-1} = \frac{\frac{k}{2}-1-p+l}{p-1};$$

comme $\frac{k}{2}+l < p+1$, on vérifie que $-1 \leq s < 0$.
Comme on suppose $l > 0$, on voit que (notations de la proposition 5.4) $(j_0 - \alpha)_0 = l-1$. Considérons donc

$$s' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-(j_0+\alpha)_0}{p-1} = \frac{\frac{k}{2}-2-l}{p-1};$$

on en déduit que $0 \leq s' < 1$ pour $l \leq \frac{k}{2}-2$, $-1 \leq s' < 0$ sinon. Il ne reste qu'à étudier les cas $l = 0$, $l = \frac{p-1}{2}$.
Soit $l = 0$. Alors $j_0 \in \{\frac{p-1}{2}-1; p-2\}$. Si $j_0 = \frac{p-1}{2}-1$, on considère

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-j_0}{p-1} = \frac{\frac{k}{2}-2-\frac{p-1}{2}}{p-1}$$

et on vérifie que $-1 \leq u < 0$.
Si $j_0 = p-2$, on considère

$$u' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-j_0}{p-1} = \frac{\frac{k}{2}-1-p}{p-1}$$

et, comme dans le cas précedént, on vérifie que $-1 \leq u < 0$.
L'étude du cas $l = \frac{p-1}{2}$ est similaire. On en déduit que il n'y a pas de facteur de la forme $\sigma_0 \otimes \omega^{j_0}$ ou de la forme $\sigma_{p-1} \otimes \omega^{j_0}$.

On en déduit le résultat suivant, à l'aide de la proposition 5.4.

La représentation σ_{n_k} possède les facteurs de Jordan-Hölder suivants, tous de multiplicité 1 :

i) $\sigma_{2l} \otimes \omega^{-1-l}$ *pour* $l \in \{1, \dots, \frac{k}{2}-2\}$ *;*

ii) $\sigma_{2l} \otimes \omega^{\frac{p-1}{2}-1-l}$ *pour* $l \in \{\frac{p-1}{2}+2-\frac{k}{2}, \dots \frac{p-1}{2}-1\}$ *i.e.* $\sigma_{p-3-2l'} \otimes \omega^{l'}$ *pour* $l' \in \{0, \dots, \frac{k}{2}-3\}$

iii) le facteur $\sigma_{p+1-k} \otimes \omega^{\frac{k}{2}-2}$.

Bibliographie

[1] Breuil, C. *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *I.* Compositio Math 138, 2003, 165-188.

[2] Breuil, C. *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *II.* J. Inst. Math. Jussieu 2, 2003, 1-36.

[3] Breuil, C. *Representations of Galois and of* GL_2 *in characteristic p.* cours à l'université de Columbia, automne 2007, www.ihes.fr/ breuil/publications.html

[4] Breuil, C. ; Mézard, A. *Reprsentations semi-stables de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, demi-plan p-adique et rduction modulo p.* à paraître à Astŕisque.

[5] Curtis, J. ; Reiner, I. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Interscience Publishers (1962)

[6] Demazure, M. ; Gabriel, P. *Groupes Algèbriques, tome I.* Masson et Cie éditeurs Paris (1970)

[7] Fulton, W. ; Harris, J. *Representation Theory : A First Course.* Graduate Texts in Mathematics 129, Springer Verlag, New-York (1991)

[8] Glover, D.J. : *A Study of Certains Modular Representations.* Journal of Algebra 51, 425-475 (1978)

[9] Harrys, M. ; Taylor, R. : *On the geometry and cohomology of soma simple Shimura varieties.* Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press (2001)

[10] Henniart, G. *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GLn sur un corps p-adique.* Invent. Math. 139, 439455 (2000)

[11] Jantzen, J.C. : *Representations of Algebraic Groups.* American Mathematical Society, Mathematical surveys and monographs no.107 (2003)

[12] Lang, S. : *Algebra* Graduate Text in mathematics 211, Springer-Verlag, New-York (2002)

[13] Milne, J.S. : *Algebraic Groups and Arithmetics Groups.* Version 1.01, www.jmilne.org/math

[14] Mumford, D. ; Fogarty, J. ; Kirwan, F. : *Geometric Invariant Theory.* Ergebnisse der Matematik und ihrer Granzgebiete 34, Springer-Verlag (2002)

[15] Paskunas, V. : *Coefficients Systems and Supersingular Representations of $GL_2(F)$*. Mémoires de la société Mathématique de France N.99, Paris (2004)

[16] Passman, D.S. : *A Course in Ring Theory.* AMS Chelsea Publishing, (2004)

[17] Shapira, P. : *Algebra and Topology.* Note du cours à l'université Paris VII, 2006/2007, www.institut.math.jussieu.fr/ schapira/polycopies/

[18] Vignéras, M.F. : *Représentations algébriques irréductibles de* $\mathrm{GL}_2(2)$. polycopies du cours M2 à l'université Paris VII, http ://www.math.jussieu.fr/ vigneras/

[19] Wilson, J.S. : *Profinite Groups.* Oxford University Press, New-York (1998)

stefano.morra@inwind.it
Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines,
Département de Mathématiques
bâtiment Fermat - 45 avenue des Etats-Unis
78035 Versailles cedex