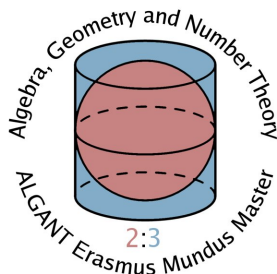


UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD 11



Fonctions harmoniques sur courbes analytiques non archimédiennes

Mémoire pour l'achèvement du Master 2 en
Mathématiques.

Candidat :
Daniele TURCHETTI

Directeurs :
Antoine DUCROS
Marco Andrea GARUTI

Présenté à l'IMJ le 13 Juillet 2011.

Ai miei genitori, che mi hanno dato la vita.

A Gaia e a J che, ognuno a suo modo, me l'hanno salvata.

Table des matières

1	Analyse non-archimédienne	1
1.1	Corps ultramétriques	1
1.2	La théorie de Berkovich	3
1.2.1	Algèbres affinoïdes	3
1.2.2	Parallélisme avec la théorie des schémas	4
1.2.3	Exemples fondamentaux	6
1.2.4	Points de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$	10
1.2.5	Fonctorialité et changement de base	11
1.2.6	Domaines affinoïdes	12
1.2.7	Espaces k -analytiques	13
1.2.8	Topologie et G -topologie	14
1.2.9	Dimension	18
1.2.10	Norme spectrale	19
1.3	Géométrie rigide et formelle	20
1.3.1	Les points rigides	20
1.3.2	Schémas formels	23
1.3.3	Réduction	24
2	Courbes analytiques de Berkovich	27
2.1	Analytifier une courbe algébrique	27
2.1.1	La droite affine et la projective	29
2.1.2	Courbes	30
2.1.3	Théorèmes “de type GAGA”	31
2.2	Courbes strictement k -analytiques	31
2.2.1	La structure de graphe réel	32
2.2.2	Courbes formelles	32
2.3	Le squelette d’une courbe simplement semi-stable	33
2.3.1	Polytopes et polyèdres	34
2.3.2	Courbes élémentaires	36
2.3.3	Courbes simplement semi-stables	37
2.3.4	Preuve du théorème d’existence du squelette	38
2.3.5	Un squelette nontriviale : les courbes de Tate	41

3	Théorie du potentiel	43
3.1	Théorie classique	43
3.1.1	Fonctions sous-harmoniques	44
3.1.2	Capacités et théorème de Fekete-Szegö	45
3.1.3	Fonctions harmoniques sur les polyèdres	45
3.2	Le faisceau des germes des fonctions harmoniques	48
3.2.1	Fonctions “globalement”harmoniques : $H(\mathcal{X})$	48
3.2.2	Réduction semi-stable	48
3.2.3	Fonctions harmoniques et logarithmes des fonctions régulières	49
3.2.4	Ces fonctions sont vraiment ”harmoniques”	51
3.3	L’opérateur dd^c	52
3.3.1	Fonctions et formes lisses	52
3.3.2	Ce qu’on voudrait appeler l’opérateur de Laplace : dd^c	53
4	Applications à la théorie de l’intersection arithmétique	55
4.1	Théorie d’Arakelov classique	55
4.2	Théorie d’Arakelov “uniforme”	57
4.2.1	Courants	58
4.2.2	Diviseurs d’Arakelov	59
4.2.3	Métriques lisses sur faisceaux inversibles	60

Introduction

Le résultat principal contenu dans ce travail, dû à Amaury Thuillier [Thu], est la définition d'un faisceau de fonctions harmoniques sur une courbe strictement k -analytique lisse où k est un corps ultramétrique complet. D'ici tous les éléments d'une théorie du potentiel sont définis sur ces courbes à l'aide d'outils différents : le recollement des morphismes étales, un théorème de réduction semi-stable, la construction d'une théorie du potentiel pour les polyèdres, les courbes formelles, leur fibre spéciale et générique et les applications de réduction. La définition d'une courbe strictement k -analytique est donnée dans le contexte de la géométrie de Berkovich : ici les espaces k -analytiques jouissent des bonnes propriétés topologiques (ils sont localement compacts et localement connexes par arcs) et les courbes "assez bonnes" contiennent naturellement des structures de graphe réel qui nous exploiterons pour nos buts.

Nous commencerons en introduisant les fondements de cette théorie, les objets et les outils qui naturellement y apparaissent, en expliquant ensuite les relations qu'elle a avec les constructions classiques dans la géométrie analytique non-archimédienne. Nous nous consacrerons après à l'étude des courbes analytiques en montrant plusieurs façon d'en obtenir comme par le biais de l'analytification d'une courbe algébrique ou en considérant la fibre générique d'un schéma formel plat et topologiquement de présentation finie. Nous précisons ensuite ce qui sont les courbes sans pathologies qu'avons envie de considérer : nous les appellerons courbes strictement k -analytiques. Enfin esquisserons une preuve d'existence du squelette : une structure polyédrale, associée à une k^o -courbe formelle \mathcal{X} , qui est homéomorphe à une partie fermée de la fibre générique de \mathcal{X} .

Dans le troisième chapitre introduisons la théorie du potentiel : après un survol des outils classiques dont on veut construire les analogues ultramétriques, nous allons définir, avec les connaissances provenant du chapitre 2 et une convenable définition de fonction harmonique sur un polyèdre de dimension au plus 1, un faisceau de fonctions harmoniques sur chaque courbe strictement k -analytique lisse. Ceci est la clé pour l'introduction des autres objets propres de la théorie du potentiel, spécialement un convenable "opérateur de Laplace", qui seront ainsi définis sans difficultés.

Enfin, dans le chapitre 4, nous décrivons la motivation principale qui a amené

A.Thuillier à développer cette théorie : l'introduction d'une théorie d'Ara-
kelov "uniforme", où non seulement les faisceaux inversibles sur les fibres au
dessus de la place infinie, mais aussi ceux au dessus des places finies peuvent
être munis d'une métrique lisse. À propos de ceci, nous nous limiterons sans
entrer dans les détails, à définir les analogues uniformes de la théorie clas-
sique.

Il faut aussi remarquer que, même si pas présente dans ce mémoire, une des
principales applications de cette théorie du potentiel ultramétrique est à la
dynamique holomorphe grâce aux travaux de C.Favre, M.Jonsson, R.Rumely
et M.Baker.

Chapitre 1

Analyse non-archimédienne

C'est qu'un charme ordinaire a
trop peu de pouvoir
Sur les spectres parlants qu'il
faut vous faire voir.
Entrons dedans ma grotte afin
que j'y prepare
Quelques charmes nouveaux
pour un effet si rare.

(Pierre Corneille, "L'Illusion
comique")

Pour réaliser les constructions au but de notre mémoire, il faut étudier la géométrie au dessus d'un corps p-adique. Encore plus que dans le cas de la géométrie complexe, ici les aspects analytiques sont d'importance fondamentale pour une compréhension suffisante de l'argument. Précisons donc les objets, les outils et les buts de cette théorie.

1.1 Corps ultramétriques

Commençons en fixant ce que seront nos notations fondamentales.

Rappel. On appelle **corps valué** un couple $(k, \|\cdot\|)$ où k est un corps commutatif et $\|\cdot\| : k \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie les propriétés ci dessous :

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|1\| = 1$;
- 3) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$;
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Une telle fonction sera appelée **valeur absolue**.

Lorsque on regarde la topologie (induite par sa structure d'espace normé) de $(k, \|\cdot\|)$, c'est fondamental de faire la distinction entre les corps ultramétriques et les autres : on appelle **ultramétrique** une valeur absolue qui satisfait une condition plus forte de l'inégalité triangulaire appelée inégalité ultramétrique :

$$4 \text{ bis) } \|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Pourquoi cette condition? Ceci provient de mesure large du fait que à chaque valeur absolue ultramétrique est associée canoniquement une valuation, c'est-à-dire une application $v : k \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ telle que :

- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$;
- v induit, par restriction sur k^\times , un morphisme de groupes;
- $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Ici Γ est un groupe abélien (additif) totalement ordonné qui est isomorphe au groupe (multiplicatif) des normes réalisables $\{r \in \mathbb{R}_+ : |x| = r, \exists x \in k\}$. Il est appelée **groupe des valeurs** de k et il est noté $|k^\times|$. La théorie générale des corps munis d'une valuation est très développé et se révélera très utile aux nôtres buts. Pour commencer on rencontre dans ce cas des objets d'importance fondamentale.

1.1 Définition. Soit (k, v) un corps muni d'une valuation. On appelle **anneau de valuation** le sous-anneau $k^o := \{x \in k : v(x) \geq 0\}$ de k . C'est une anneaux locale d'idéal maximal $k^{oo} := \{x \in k : v(x) > 0\}$. Le corps $\tilde{k} := k^o/k^{oo}$ est appelé le **corps résiduel** de k .

Les corps valués ultramétriques satisfont en outre certaines propriétés qui leur donnent une structure métrique assez singulière :

1.2 Théorème. Soit $(k, \|\cdot\|)$ un corps valué ultramétrique. Alors :

- l'espace topologique k est totalement discontinu et pas toujours localement compacte;
- $x \in k, y \in B(x, r] \Rightarrow B(y, r] = B(x, r]$;
- Si k est complet et $a_i \in k$ alors $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ converge si et seulement si $\|a_i\| \rightarrow 0$;

Dorénavant on considérera toujours un corps ultramétrique complet. Cette choix est justifiée par le fait qu'on veut travailler avec les anneaux des séries convergents, mais se révèle aussi utile car nous permet d'éviter des ambiguïtés par rapport au prolongement des valeurs absolues sur extensions de k . Si celui-ci est complet, en fait, chacune de ses extensions finies admet une unique valeur absolue qui est prolongement de $\|\cdot\|$ et par conséquent ceci vaut aussi pour chaque extension algébrique de k . Les exemples plus naturels de corps ultramétriques complets sont les corps p-adiques (extensions finies de \mathbb{Q}_p) et le corps des séries de Laurent en une variable $K((t))$.

1.2 La théorie de Berkovich

Nous voulons considérer les objets géométriques qui relèvent de l'analyse sur ce corps : la topologie étant totalement discontinue comme on a remarqué, il est clair qu'une approche analogue à la géométrie analytique complexe nous donnera une définition non souhaitée des fonctions localement développables en série entière. Par exemple la fonction caractéristique de \mathbb{Z}_p à valeurs dans $\{0, 1\}$ est bien localement développable en série entière mais on voit bien que de cette façon on ne retrouve pas les bons objets. Plusieurs approches sont possibles : à partir de la théorie classique rigide dont les fondements ont été établis par J.Tate dans les années '60 jusqu'aux prolongements plus récents. Nous utiliserons ici la théorie de Berkovich qui se prête très bien pour remédier à ce problème. Par ailleurs on y trouve, dans des cas convenables la possibilité d'y définir des fonctions harmoniques. Plus en particulier sont naturellement présents dans les courbes de Berkovich des structures polyédrales qu'on utilisera beaucoup : il s'agit d'une structure de graphe dont la topologie est employée pour montrer nombreuses résultats sur les courbes non-archimédiennes.

1.2.1 Algèbres affinoïdes

Fixons un corps ultramétrique $(k, |\cdot|)$. Puisque on veut faire de l'analyse les anneaux des fonctions (éventuellement en plusieurs variables) les plus naturels à considérer sont les algèbres de la forme

$$k\left\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\right\} := \left\{ \sum a_I T^I : \forall x_1, \dots, x_n \in L^n \text{ avec } |x_i| \leq r_i, |a_I| |x^I| \rightarrow 0 \right\}$$

pour tout L extension complète de k . Remarquons que il est équivalent de demander que $|a_I| r^I \rightarrow 0$ (si $|I| \rightarrow \infty$). En fait si on prends une extension complète L (l'existence d'une telle extension est connue) de k et des n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$ avec $|x_i| = r_i$ on a l'équivalence dans L et, a fortiori, sur k . On peut donner une structure de k -algèbre de Banach à $k\left\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\right\}$ par le biais de la "sup"-norme $\|\sum a_I T^I\|_{sup} = \max |a_I| r^I$.

1.3 Théorème. L'anneau $k\left\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\right\}$ est noetherien et ses idéaux sont des fermés par la topologie induite par la norme.

Cette propriété est intéressante car nous permet d'avoir l'intuition d'une construction des espaces analytiques qui admet des similarités avec la construction des schemas en géométrie algébrique : en fait si I est un idéal de $k\left\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\right\}$, l'anneau $k\left\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\right\}/I$ hérite, via la norme quotient, une structure de k -algèbre de Banach. Algèbres de telles seront les briques fondamentales pour l'étude des espaces analytiques non-archimédiens.

1.4 Définition (Berkovich). Une k -algèbre de Banach \mathcal{A} est dite **affinoïde** si elle est isomorphe à un quotient de la forme $k\left\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\right\}/I$.

Il faut préciser qu'on travaille dans la catégorie des anneaux de Banach (et plus précisément dans la sous-catégorie des k -algèbres de Banach). L'isomorphisme est donc un morphisme d'algèbres de Banach, c'est à dire un morphisme borné. Il s'agit par définition d'un $\varphi : (A, \|\cdot\|_A) \rightarrow (B, \|\cdot\|_B)$ tel que $\|\varphi(x)\|_B \leq C\|x\|_A$ pour tout $x \in A$. De même observons que pour donner un sens à une somme amalgamée d'algèbres de Banach il faut parler de produits tensoriels *complétés séparés* : si M et N sont k -algèbres de Banach, $M \widehat{\otimes}_k N$ est défini comme le complété séparé de $M \otimes N$ pour la semi-norme $u : \sum m_i \otimes n_i \rightarrow \max\|m_i\| \|n_i\|$.

1.5 Définition. Si on peut trouver une présentation d'une k -algèbre de Banach \mathcal{A} affinoïde avec les $r_i = 1$ on dit que \mathcal{A} est **strictement k -affinoïde**.

Remarque. Il est équivalent pour avoir une algèbre strictement k -affinoïde de demander qu'on puisse trouver une présentation avec $r_i \in |k^\times|$ ou encore avec $r_i \in \sqrt{|k^\times|} := \{x^{1/n}/n \in \mathbb{N}, x \in |k^\times|\}$.

Faisons la liste de quelques propriétés des algèbres k -affinoïdes :

- Si \mathcal{A} est affinoïde sur k et L est une extension de K , alors $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$ est affinoïde ;
- Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont des algèbres k -affinoïdes et si $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ et $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ sont des morphismes d'algèbres de Banach, alors $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}$ est k -affinoïde ;
- Si $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ est morphisme surjectif d'algèbres k -affinoïdes et $|k^\times| \neq \{1\}$, alors $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}/\ker \varphi$ avec la structure de Banach donnée par le biais de la norme quotient.

1.2.2 Parallélisme avec la théorie des schémas

En ayant commencé en introduisant les corps des fonctions c'est naturel de voir jusqu'à où est possible de pousser l'analogie (en d'autres termes jusqu'à où est possible de définir une théorie "schématique" des k -algèbres de Banach) : on aimerait par exemple comprendre ce qu'est le lieu des zéros de ces fonctions et regarder toutes les constructions (éventuellement) reproductibles là dessus.

LIEU DES ZÉROS

Théorie algébrique

On représente le lieu des zéros d'un système d'équations polynomiales $f_1, \dots, f_n \in A := k[X_1, \dots, X_m]$ comme l'ensemble d'idéaux maximaux dans A : L'ensemble des $\mathfrak{m} \in A$ qui satisfont le système sera donc identifiée à l'ensemble $\{\mathfrak{m} \text{ idéaux maximaux dans } A : A/\mathfrak{m} \cong k \text{ et } f_i \in \mathfrak{m} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n\}$.

Théorie analytique	Considérons maintenant un système d'équations de séries localement convergents en m variables $s_1, \dots, s_n \in S := k\{T_1, \dots, T_m\}$ et essayons d'en comprendre le lieu des zéros : il n'y a aucun problème à répéter le raisonnement d'ici-dessus et ensemblistiquement le lieu des zéros sera identifié à $\{\mathfrak{m}$ idéaux maximaux dans $S : S/\mathfrak{m} \cong k$ et $s_i \in \mathfrak{m}$ pour tout $i = 1, \dots, n\}$.
SPECTRE	
Théorie des Schémas	L'idée de Grothendieck est celle de regarder non seulement les solutions de certaines équations dans un corps k , mais de construire une structure qui permette de regarder ces points dans n'importequelle extension L de k . Plus précisément on pense aux L -points d'un schéma affine comme aux morphismes de k -algèbres $A/I \rightarrow L$. Si L' est une extension de corps de L on identifie les L' -points qui proviennent des L -points si on a une bonne factorisation $L \rightarrow L'$ qui commute avec les morphismes associés aux points considérés.
Théorie de Berkovich	Un raisonnement analogue est valable quand on considère les points d'une k -algèbre de Banach : on veut avoir une structure assez souple qui nous permette de considérer les points dans toute extension complète de k . Les solutions dans L du système d'équations défini par l'idéal I s'identifie aux morphismes bornés $k\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_m}{r_m}\}/I =: \mathcal{A} \rightarrow L$ modulo l'identification par factorisation de certains points.

Remarque. Il convient immédiatement d'observer que la définition classique de spectre d'un anneau comme l'ensemble des idéaux premiers de cet anneau est absolument équivalente à celle donnée ci dessus par les classes de morphismes. Étant donné un morphisme représentant une classe on lui associe l'idéal premier noyau de ce morphisme. Réciproquement pour chaque idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ on a un morphisme canonique dans le corps résiduel $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$ telle que tout autre morphisme avec le même noyau se factorise par ceci. Dans le cas Berkovich, un phénomène analogue se présente : on peut associer à chaque classe de morphismes bornés $A \rightarrow L$ une seminorme multiplicative bornée sur A et inversement chaque seminorme multiplicative $|\cdot|_x$ bornée définit un morphisme borné "minimal" (dans le sens qu'il factorise par isométries tout autre morphisme $A \rightarrow K$ induisant la même semi-norme) sur son **corps résiduel complété** $\mathcal{H}(x) = \widehat{\text{Frac}}_{\ker(|\cdot|_x)} A$. Ceci justifie cette définition fondamentale de la théorie de Berkovich.

1.6 Définition. On appelle *spectre analytique* d'un anneau de Banach $(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur A . On le note $\mathcal{M}(A)$.

Si $f \in A$ et $|\cdot|_x$ est une seminorme multiplicative bornée sur A nous écrivons $f(x)$ pour l'image de f dans $\mathcal{H}(x)$ de façon telle que $|f(x)|$ désigne exactement $|f|_x$.

Muni de la topologie la plus faible que rend les fonctions $ev_f : |\cdot|_x \rightarrow |f(x)|$ continues, $\mathcal{M}(A)$ acquiert une structure d'espace topologique. L'application $A \rightarrow \mathcal{M}(A)$ s'étend à un foncteur entre la catégorie des anneaux de Banach et la catégorie des espaces topologiques. En plus ces espaces analytiques jouissent de propriétés remarquables qui leur donnent un intérêt particulier :

- Il existe une application continue $\varpi : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$ définie par $\varpi(|\cdot|_x) = \{f \in \mathcal{A} : f(x) = 0\}$ qui est une surjection si la norme triviale est bornée par la norme de A ou si $A = \mathcal{A}$ est une algèbre k -affinoïde ;
- $\mathcal{M}(A)$ est compact. Si A est affinoïde il est aussi localement connexe par arcs.

Remarque. L'application ϖ nous permet de définir une autre topologie sur $\mathcal{M}(A)$, plus grossière de celle canonique, où les fermés sont les images réciproques des fermés de Zariski dans $\text{Spec}(A)$. Cette topologie, par extension nommé **de Zariski**, se révèle utile pour considérations sur propriétés qu'en géométrie algébrique proviennent naturellement de la topologie de Zariski comme la dimension et l'irréductibilité.

1.2.3 Exemples fondamentaux

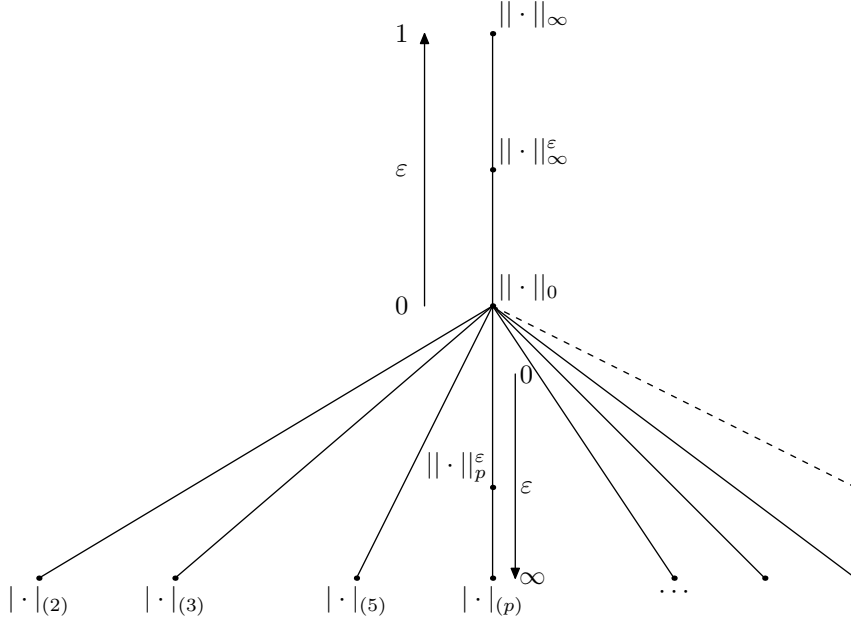
Les entiers

Considérons \mathbb{Z} . Il devient un anneau de Banach quand on le munit de la norme discrète $\|\cdot\|_\infty$. D'après l'inégalité triangulaire cette norme est la seminorme maximale (dans le sens que chaque autre seminorme est bornée par celle ci) qu'on peut définir sur l'anneau des entiers. Que est-ce que on peut dire de $\mathcal{M}(\mathbb{Z}, \|\cdot\|)$? D'après le théorème d'Ostrowski chaque seminorme multiplicative est d'une des formes suivantes :

- $\|\cdot\|_\infty^\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon \leq 1$;
- La norme triviale $\|\cdot\|_0$;
- Les normes $\|\cdot\|_p^\varepsilon$ où $\|\cdot\|_p$ est induite par la valuation p -adique sur \mathbb{Q}_p , avec variation d' ε entre 0 et ∞ ;
- Les semi-normes $|\cdot|_{(p)}$ induites par la norme triviale sur \mathbb{F}_p .

Lorsque on a défini la topologie comme ici dessus, une variation infinitésimale de ε coïncidera avec un déplacement infinitésimal sur l'espace analytique. Ce

qu'on obtient c'est un dessin comme ceci dessous :



La surjection sur le spectre affine de \mathbb{Z} est bien visible : elle envoie chaque extrémité inférieure dans le premier lui associé et tout le reste dans le point générique. En un certain sens on a soufflé le point générique de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ jusqu'à obtenir une structure séparée et connexe par arcs.

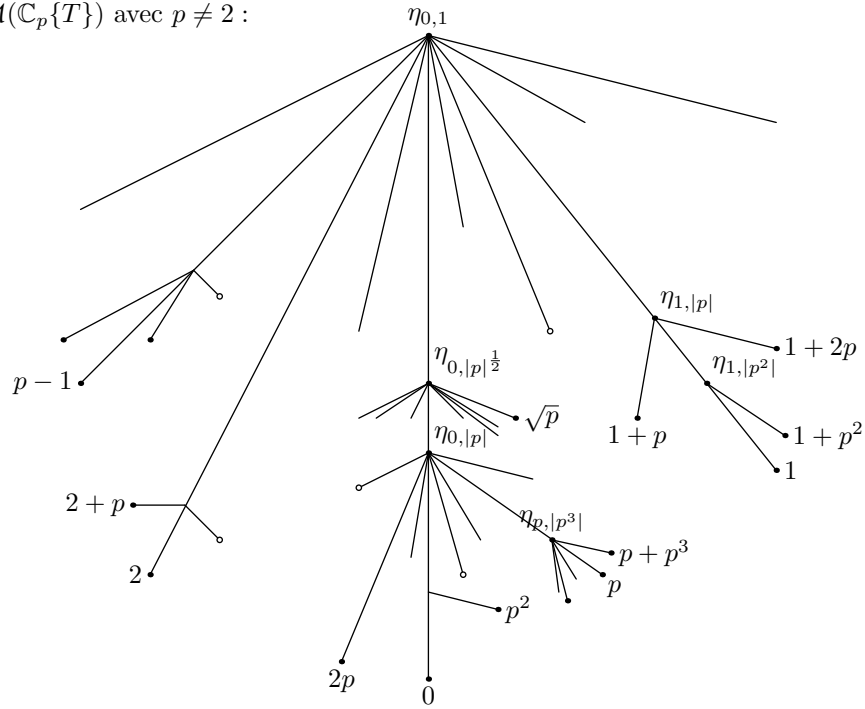
Les polydisques en dimension 1 : classification des points

Un autre exemple fondamental est $\mathcal{M}(k\{\frac{T}{r}\})$ avec k algébriquement clos et muni d'une norme non triviale. Nous retrouvons lui associé 4 types de points : à chaque $a \in k$ est associé un point $\eta_{a,0}$ correspondant à la semi-norme $P \mapsto |P(a)|$. Les points ainsi obtenus sont appelés **de type (1)** et sont identifiés aux points qui proviennent de la théorie rigide.

Pour les mêmes a il y a aussi des semi-normes $\eta_{a,R}$ définies par la formule $\sum a_i(T - a)^i \mapsto \max |a_i|R^i$ avec $R \leq r$. Celles-ci résultent associées aux boules fermées de k -points avec rayon borné par r , c'est-à-dire aux $D_{a,R} = \{f \in k, |(f - a)| \leq R\}$. En fait si on considère un point $b \in D_{a,R}$ $\eta_{a,R} = \eta_{b,R}$ en vertu de l'implication ultramétrique $|a - b| < R \Rightarrow |T - b + b - a| = |T - b|$ (l'inégalité ultramétrique est utilisée aussi pour montrer la multiplicativité de la semi-norme $\eta_{a,R}$). Cette définition est compatible avec la précédente au sens que, si posons $R = 0$, nous retrouvons la semi-norme correspondante à un point de type (1) associé à a : on peut décrire la semi-norme associée à une boule fermée comme $|P|_{D_{a,R}} : P \mapsto \sup_{t \in D_{a,R}} |P(t)|$. Nous avons appelé $\eta_{a,R}$ point **de type (2)** lorsque $R \in |k^\times|$ et point **de type (3)** sinon. Enfin on a observé qu'une dernière semi-norme est associée à chaque famille des boules $\{D_{a_i,R_i}\}_{i \in I}$ indexé sur un ensemble totalement

ordonné I et décroissante par inclusion. Cette semi-norme est décrite par $P \mapsto \inf_{i \in I} |P|_{D_{a_i, R_i}}$ et ne coïncide pas nécessairement avec un point de type (1). En fait, si $\bigcap_{i \in I} D_{a_i, R_i} = \emptyset$, ce qui peut arriver si k n'est pas sphériquement complet, il n'existe pas un point $a \in k$ qui donne structure de point de type (1) à cette semi-norme. En ce cas, on appelle le point associé, **de type (4)**. Voici un dessin dans le cas du rayon 1 sur \mathbb{C}_p : les points de type (4) sont représentés par les \circ tandis que les autres points au but d'une branche sont de type (1). Les branchements arrivent seulement dans les points de type (2), comme dans le cas du point $\eta_{0,1}$, appelé **point de Gauss**.

$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p\{T\})$ avec $p \neq 2$:



Le cas de norme triviale sur k

Le cas dans lequel la norme triviale sur k donne la structure analytique à $\mathcal{M}(k\{\frac{T}{r}\})$ est tout à fait différent : considérons $r > 1$ pour étudier la situation en toute généralité. Nous rappelons qu'il faut donc étudier les semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{M}(k\{\frac{T}{r}\})$ bornés par la norme

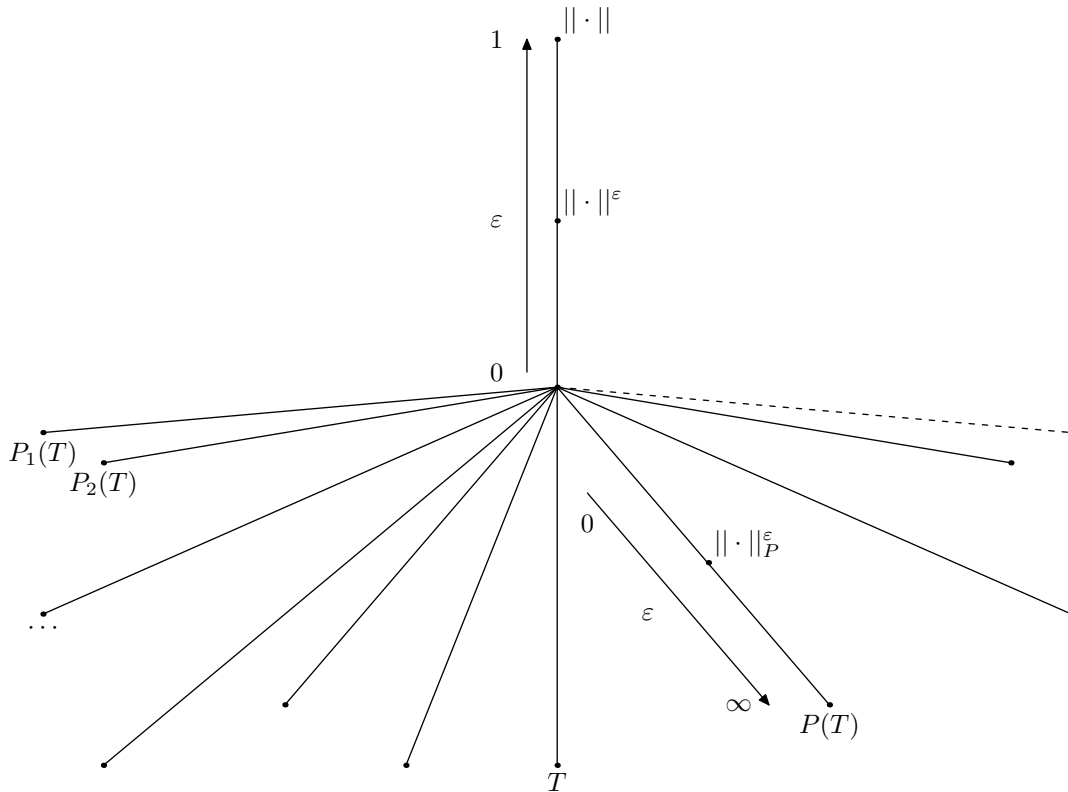
$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n \right\| := \max_{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0} r^n.$$

Nous observons d'abord qu'il n'y a pas de séries proprement dites dans cette algèbre de Tate : l'unique "convergence" qu'on peut espérer est celle des séries avec $a_i = 0$ définitivement : $k\{\frac{T}{r}\} = k[T]$ pour tout $r \geq 1$ et la norme de Banach associée à un polynôme $Q(T)$ la valeur $r^{\deg(Q)}$.

Soit donc $|\cdot|$ une semi-norme multiplicative bornée sur $k[T]$ nous distinguerons entre le cas $|T| > 1$ et le cas $|T| \leq 1$. Dans le premier la norme est topologiquement équivalente à la norme de Banach et donc de la forme $|Q| = r^\varepsilon \deg Q$ pour $0 < \varepsilon \leq 1$. Dans le deuxième, à exception de la norme triviale, on a une semi-norme associée à chaque polynôme irréductible $P \in k[T]$, pour chaque $0 < \varepsilon < 1$ suivant la loi :

$$Q \mapsto \varepsilon^{v_P(Q)}.$$

Enfin la norme triviale sur le corps $k[T]/(P)$ induit encore une semi-norme multiplicative bornée. Ce cas est vraiment semblable à $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$, aussi d'un point de vue topologique comme on remarque en voyant le dessin :



Si d'abord ceci pourrait paraître surprenant, il ne faut pas oublier que cette analogie a déjà été remarquée par plusieurs auteurs dans des contextes tout à fait différents : par exemple une observation à la base de la géométrie d'Arakelov est que, en étudiant l'anneau des entières d'un corps de nombres la géométrie algébrique doit être complétée par la géométrie complexe. En fait une fonction méromorphe non nulle f sur une courbe (lisse et complète) S satisfait la formule des résidus de Cauchy

$$\sum_{x \in S} v_x(f) = \sum_{x \in S} Res_x \left(\frac{df}{f} \right) = 0$$

en tant qu'on peut déduire une formule qui le rassemble à partir d'un nombre rationnel q et de la formule du produit

$$\prod_{v \in \text{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \infty} |q|_v = 1$$

et définissent $v_\infty(q) := -\log(|q|)$ on peut bien écrire l'analogue

$$\sum_{p \in \text{Spec}(\mathbb{Z})} v_p(q) \log(q) + v_\infty(q) = 0.$$

La description des spectres analytiques d'anneaux des fonctions et d'anneau des entiers donne une autre contribution à la compréhension de ce phénomène. Remarquons par exemple que en tous les deux cas la norme triviale pratique une séparation (remarquable en regardant le dessin) entre normes archimédiennes (au dessus) et non-archimédiennes (au dessous). Cette distinction est conservée si on considère par exemple le spectre analytique d'un anneau d'entiers d'un corps des nombres.

1.2.4 Points de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

Comme on a vu toutes les propriétés énoncées sont valables dans le cas d'un anneau de Banach quelconque, mais il faut aussi dire que une théorie générale "schématique" (dans le sens qu'il existe une catégorie convenable tel que $A \rightarrow \mathcal{M}(A)$ réalise une équivalence de catégories, comme dans le cas des schémas affines) pour les anneaux de Banach ne semble guère possible. Par contre si on se restreint à la sous-catégorie des algèbres k -affinoïdes sa catégorie opposée s'identifie à la catégorie des spectres k -affinoïdes via l'équivalence donnée par ce foncteur "spectre analytique" : c'est pour cela qu'on se consacrera au cas particulier des spectres d'algèbres affinoïdes et on fera de celles-ci nos briques locales pour la constructions des espaces k -analytiques généraux. Mentionnons qu'une théorie très intéressante des courbes de Berkovich sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres a commencé à être développée notamment par Jérôme Poineau dans [Poi].

On commence par remarquer que si $\mathcal{A} = k\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_m}{r_m}\}$, une base pour la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est donnée par $\{x : r_1 < |f_1(x)| < R_1; \dots; r_n < |f_n(x)| < R_n, f_i \in \mathcal{A}; r_i, R_i \in \mathbb{R}_+\}$. Que est-ce que on peut dire avec la plus grande généralité possible des points de cette algèbre suivant la définition de Berkovich ?

Soit $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in [0, r_1] \times \dots \times [0, r_n]$ et considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathbf{s}} & \mathbb{R}_+ \\ \sum a_I T^I & \mapsto & \max |a_I| \mathbf{s}^I \end{array}$$

Elle est une seminorme multiplicative bornée qui peut ainsi immerger le pavé réel $[0, s_1] \times \dots \times [0, s_n]$ dans le polydisque de Berkovich de polyrayon $[r_1, \dots, r_n]$. En particulier le point correspondant à $(s_i = 0)$ est l'origine classique (i.e. la semi-norme correspondante à $f \mapsto |f(0)|$).

Si le corps ultramétrique n'est pas algébriquement clos

Soit k un corps ultramétrique complet pas forcément algébriquement clos. Regardons les lieux des zéros pour les fonctions de $k\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\}/\mathcal{I}$ dans une extension algébrique de k .

Soient \mathcal{I} un idéal de \mathcal{A} , k^{alg} une clôture algébrique fixé de k et $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^{alg} : f(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall f \in \mathcal{I}\}$. Alors on a un morphisme $\iota : E \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}/\mathcal{I})$ qui n'est pas en général injectif. Sa image par contre est facile à décrire en termes galoisiens : $\text{Im}(\iota) \cong F/\text{Gal}(k^s|k)$, où k^s dénote une clôture séparable de k .

Remarque. Ce qu'on vient de dire n'est rien d'autre qu'une explication de comment on pourrait toujours se ramener au cas k -algébriquement clos : si k est un corps ultramétrique quelconque pour trouver les k -points d'un spectre analytique d'une algèbre k -affinoïde il suffit de regarder le points dans le complété de sa clôture algébrique et quotienter par l'action du groupe de Galois de k^s sur k .

1.2.5 Functorialité et changement de base

Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux algèbres affinoïdes et $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme entre elles. On a vu que par functorialité contravariante nous obtenons une application continue $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Si on veut regarder la fibre de $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ par cette dernière fonction il n'y a rien de nouveau à faire par rapport à la théorie schématique : elle est représentée par $\mathcal{M}(\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(x))$ (c'est assez facile de le montrer en utilisant la propriété universelle du produit tensoriel complété).

Si L est une extension complète de k on a un morphisme naturel $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L$ qui induit naturellement $\mathcal{M}(\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k L) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$. La surjectivité est donnée par le fait que $\mathcal{M}(L \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)) \neq \emptyset$ pour tout élément du spectre analytique de \mathcal{A} . En général on reconnaît dans le produit tensoriel complété l'instrument principe pour définir le produit fibré dans les espaces analytiques qu'on a envie de construire. Á savoir pour tout \mathcal{A}, \mathcal{B} sur \mathcal{C} (i.e. on dispose de morphismes $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$) on donnera un statut spécial de "cartesian" aux diagrammes de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathcal{C}} \mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{C}) \end{array}$$

Lorsque on saura recoller ces espaces affinoïdes sera immédiat de prolonger le produit fibré au cas plus générale. Nous verrons dans la suite comme l'ex-

tension de scalaires est le moyen d'avoir une bonne définition de dimension d'un espace k -analytique.

1.2.6 Domaines affinoïdes

À propos de recollement, il sera opportune de savoir quelles seront les briques à recoller pour obtenir ces espaces généraux qu'on voudrait étudier :

1.7 Définition. Soit \mathcal{A} une algèbre affinoïde, soit V partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On dit qu'elle est un **domaine affinoïde** s'il existe une algèbre affinoïde \mathcal{A}_V et un morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V$ tels que

- 1) L'image de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est contenue dans V ;
- 2) Pour tout L extension complété de k , pour tout \mathcal{B} algèbre affinoïde sur L , pour tout $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tel que l'image de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ soit contenue dans V , alors existe unique une factorisation de φ de la forme $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{B}$.

Remarquons que, en vertu de l'équivalence de catégorie entre algèbres k -affinoïdes et spectres k -affinoïdes, la propriété 2) nous amène naturellement à dire qu'un domaine affinoïde est l'objet universel associé au foncteur représentable $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \{\varphi \in \text{Mor}(\mathcal{M}(\mathcal{B}), \mathcal{M}(\mathcal{A})) : \varphi(\mathcal{M}(\mathcal{B})) \subseteq V\}$.

1.8 Proposition. L'intersection de deux domaines affinoïdes est encore un domaine affinoïde. Si \mathcal{A}_V est un domaine affinoïde, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{|_V} & \mathcal{A}_V \\ f & \mapsto & f|_V \end{array}$$

induce un homeomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \cong V$.

Avec celles-ci nous obtenons tout de suite d'autres résultats de compatibilité :

1.9 Proposition. Si V est un domaine affinoïde pour \mathcal{A} et $U \subset V$ est identifié à un domaine pour \mathcal{A}_V alors U est homéomorphe à un domaine affinoïde dans \mathcal{A} .

Démonstration. Considerons l'image de U par l'homeomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \cong V$: la condition 1) est trivialement satisfaite. Ensuite appliquons la propriété universelle aux morphismes $\psi_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_V$ et $\psi_2 : \mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$ pour obtenir la propriété universelle si considerons le morphisme composé. \square

Exemples. Donnons quelques exemples de domaines affinoïdes qui seront importantes dans la suite :

- Soient $f \in \mathcal{A}, R > 0$. La partie $\{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : |f(x)| \leq R\}$ est un domaine affinoïde.

- Plus en général une partie de la forme $\{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : |f_i(x)| \leq R_i\}$ avec $f_i \in \mathcal{A}, R_i \geq 0$ est un domaine affinoïde. On l'appellera **domaine de Weierstrass**;
- Poursuivent avec cette généralisation on construit les sous ensembles $\{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}); |f_i(x)| \leq R_i, |g_j(x)| \geq R_j\}$. Elles sont encore domaines affinoïdes appelés **domaines de Laurent**;
- Si f_1, \dots, f_n, g sont éléments de \mathcal{A} sans zéros communs (il est équivalent de demander que ces éléments engendrent l'idéal unité dans \mathcal{A}), les parties de la forme $\{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : |f_i(x)| \leq p_i |g(x)|\}$ sont (désormais ça va sans dire) des domaines affinoïdes appelés **domaines rationnels**.

Remarque. Les domaines rationnels sont particulièrement importantes en raison du fait qu'ils sont les domaines "minimaux" : tout domaine affinoïde est réunion finie de domaines rationnels. Il faut dire aussi que nous ne connaissons pas de domaines affinoïdes pas rationnels qui puissent être décrits explicitement : un domaine affinoïde est tendentialement donné par le biais d'inégalités du type montré ci-dessus. Les domaines de Laurent nous donnent la description la plus générale possible des bases des voisinages des points dans un espace k -analytique.

On a dit que ces domaines sont fondamentaux pour décrire un recollement : sans entrer dans les détails d'une construction technique on peut spécifier que il nous permettent de définir une G -topologie qui donnera sens à la notion de recouvrement affinoïde.

1.2.7 Espaces k -analytiques

On veut maintenant définir en généralité un espace analytique. Toutefois ici l'inspiration provenant de la géométrie algébrique ou analytique complexe est trompeuse : en fait les briques qu'on voudrait recoller ne sont pas des parties ouvertes mais fermées. Une construction a été proposée par V.G.Berkovich dans [Ber1], mais considéré insuffisamment générale (par exemple la catégorie des espaces k -analytique dans cette première construction ne contient pas certains espaces rigides, par exemple ceux qui sont fibres génériques d'un schéma formel localement de type fini ni propre ni affine sur l'anneau des entiers d'un corps ultramétrique) et changée par lui même dans [Ber2] : en ce dernier article il propose une nouvelle définition plus satisfaisante à l'aide d'outils très techniques et sa construction n'est pas particulièrement instructive pour son emploi, par conséquent sera omise dans ce travail. Ce qui nous intéressera le plus sera de reconnaître dans un espace k -analytique général (que jouira des bonnes propriétés topologiques comme la compacité locale et locale connexité par arcs) les parties compactes qui sont homéomorphes à un domaine affinoïde via des applications nommées **atlas affinoïdes**. Nous appellerons ces parties aussi, avec un petit abus de notation, **domaines affinoïdes**. La famille des domaines

affinoïdes dans un espace k -analytique X satisfait des conditions nécessaires à sa bonne définition. Si rappelons la propriété universelle des domaines k -affinoïdes nous semble raisonnable de demander la suivante condition de **compatibilité** : donnée une inclusion $U \subset V$ de deux domaines affinoïdes dans X on demande d'avoir un morphisme de restriction $\mathcal{A}_V \rightarrow \mathcal{A}_U$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathcal{A}_U) & \xrightarrow{\sim} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathcal{A}_V) & \xrightarrow{\sim} & V \end{array}$$

commute et que l'image de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ soit un sous domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ en regardant $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ comme une algèbre k -affinoïde. De même nous demandons des conditions de **maximalité** : la plus immédiate est d'exiger que si U est domaine affinoïde dans X et V est domaine affinoïde dans U si on identifie ce dernier avec $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ alors V est un domaine affinoïde de X . Enfin nous aurons besoin de conditions de **recouvrement**. Comment on a déjà remarqué il s'agit de parties compactes et donc il faudra relaxer notre conception de recouvrement ouvert. On dispose pour ceci de la théorie des topologies de Grothendieck dont on va donner un aperçu.

1.2.8 Topologie et G-topologie

Les topologies de Grothendieck ont été développés dans les années '60 pour résoudre les problèmes qui dérivait de l'emploi de la topologie de Zariski : une topologie trop faible pour réfléchir les propriétés plus fines des schémas, nécessaires pour établir résultats de toute première importance (au début la motivation était surtout de formaliser la théorie de la descente cohomologique). Dans la suite l'idée s'est révélée extrêmement féconde et elle a été utilisée dans un nombre impressionnant de contextes assez différents entre eux. Pour ce qui concerne ce travail on verra comme la notion de satisfaire une propriété "par morceaux" où l'idée de recollement le long de parties compactes s'expriment de façon très naturelle dans le langage des topologies de Grothendieck. Nous renvoyons à [SGA4] où à [Vistoli] pour ce qui concerne la théorie générale des topologies de Grothendieck et des faisceaux sur celles-ci et nous nous limiterons à énoncer quelques faits.

1.10 Définition. Soit \mathbf{C} une catégorie. Une **topologie de Grothendieck** sur \mathbf{C} est la donnée pour chaque objet U dans \mathbf{C} d'une collection d'ensembles de flèches (qui seront appelées **familles couvrantes**) $\{U_i \rightarrow U\}$ qui satisfont les "conditions des cribles" :

- 1) Si $V \rightarrow U$ est un isomorphisme, l'ensemble $\{V \rightarrow U\}$ est une famille couvrante ;

- 2) Si $\{U_i \rightarrow U\}$ est une famille couvrante et $V \rightarrow U$ est une flèche quelconque alors le produit fibré $U_i \times_U V$ existe et l'ensemble des projections canoniques $\{U_i \times_U V \rightarrow V\}$ est une famille couvrante associée à V ;
- 3) Si $\{U_i \rightarrow U\}$ est une famille couvrante et pour tout i nous avons une famille couvrante associée à U_i , $\{V_{ij} \rightarrow U_i\}$ alors l'ensemble des composées $\{V_{ij} \rightarrow U\}$ est une famille couvrante associée à U .

Une telle donnée généralise la notion de recouvrement et sera appelée un **recouvrement de U** . La catégorie \mathbf{C} généralise la notion de catégorie d'ouverts d'un espace topologique et sera appelée **site** une fois munie d'une topologie de Grothendieck.

Les sites X_G et X_R

Nous retrouvons très naturellement des sites dans les objets que nous avons construit : la topologie de Grothendieck qu'on va construire n'est guère loin de se comporter comme une topologie au sens usuel (les objets du site sont encore des sous ensembles de X et il ne sera difficile de comprendre les produits fibrés de tels objets) et est dénommée **G-topologie**. Regardons vite sa construction.

1.11 Définition. Soit Y une partie de X , espace analytique séparé. Elle est un **domaine (resp. strictement) k -analytique** si admet un recouvrement localement fini par des domaines (resp. strictement) k -affinoïdes.

La catégorie dont les objets sont les domaines k -analytiques de X et les morphismes les inclusions est notée \mathbf{X}_G et devient un site si on la muni de la topologie de Grothendieck pour laquelle les familles couvrantes sont les recouvrements qui peuvent être raffinés en un recouvrement localement fini par des domaines k -affinoïdes. Si nous imposons à X la condition supplémentaire d'être strictement k -analytique (ce que nous verrons être condition à imposer sur des courbes pour définir un faisceau des fonctions harmoniques), définissons X_R

Les conditions de recouvrement évoquées auparavant peuvent alors s'exprimer en disant que X lui-même est un domaine analytique, et que l'intersection de deux domaines affinoïdes de X est un domaine analytique.

Remarque. L'idée de travailler avec une topologie de Grothendieck (dont les recouvrements sont qualifiés d'admissibles) est à la base de la théorie rigide. Elle est associée à une topologie "au sens usuel" pour laquelle cet espace est Hausdorff mais qui n'est pas aussi riche que pour un espace de Berkovich et par conséquent n'est guère utilisée. Cependant pour rapprocher les deux théories il est important de voir que (comme pour la topologie) la G -topologie dans un espace de Berkovich est construite à partir du cas rigide. On verra en fait que dans un espace de Berkovich on peut reconnaître des points qu'on appellera rigides, l'ensemble des ceux-ci étant un espace rigide.

Faisceaux

Le but de ce mémoire étant de définir des fonctions harmoniques sur les courbes de Berkovich, nous pensons qu'il serait bien de s'attarder en regardant les constructions canoniques des faisceaux le plus importants dans un espace analytique. Pour construire un faisceau structural pour la G -topologie de X est de fondamentale importance le théorème suivante :

1.12 Théorème (Acyclicité de Tate). Soit $\{V_i\}$ un recouvrement fini par affinoïdes d'un espace k -affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Pour tout \mathcal{A} -module de Banach fini M , le complexe de Čech

$$0 \rightarrow M \rightarrow \prod_i M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{V_i} \rightarrow \prod_{i,j} M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{V_i \cap V_j} \rightarrow \dots$$

est exact (et admissible).

Comme corollaire de ce théorème on peut prolonger la correspondance $V \mapsto \mathcal{A}_V$ en un faisceau sur X_G . Plus précisément nous considérons pour chaque objet V de X_G , si $\{V_i \rightarrow V\}$ est un G -recouvrement affinoïde, l'objet $\mathcal{O}_X(V) := \text{Ker}(\prod_i \mathcal{A}_{V_i} \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{A}_{V_i \cap V_j})$. Grâce au théorème de Tate nous avons que si V est un domaine affinoïde alors $\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{A}_V$ et que dans le cas général $\mathcal{O}_X(V)$ ne dépend pas de la famille choisie comme recouvrement. De plus, pour construction il vérifie les propriétés de recollement qui lui donnent structure de faisceau de k -algèbres de Banach sur le site X_G . Il est appelé **faisceau structural** de X .

En particulier les morphismes de restrictions sont bornés.

1.13 Proposition. Soit X un espace k -analytique. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- i) Si X est connexe, il est connexe par arcs ;
- ii) Tout point de X admet un système fondamental des voisinages qui sont des domaines k -analytiques compacts et connexes par arcs.

Libro mattoni.

□

En utilisant le deuxième point de cette proposition on peut observer une première relation entre le site X_G et le site canoniquement associé à l'espace topologique sous-jacent à X : en fait cet énoncé nous dit que tout ouvert de X est réunion d'une famille localement finie de domaine k -affinoïdes et peut être bien considéré comme objet de X_G . En déduisons un foncteur d'inclusion $Ow(X) \rightarrow X_G$ qui se prolonge en un morphisme de sites

$$\pi_X : X_G \rightarrow Ow(X).$$

Par définition de morphisme de sites le foncteur d'inclusion est continu et la transformation naturelle des préfaisceaux se restreint aux faisceaux. Nous pouvons ainsi définir par le biais de π_X un faisceau structural pour la topologie de X .

Remarque. Une analogie avec la théorie des variétés analytifiée découle du fait que nous pouvons définir aussi le faisceau structural sur X_G suivant la règle $Y \mapsto \text{Hom}(Y, \mathbb{A}_k^{1,an})$. En fait on vérifie que, si V est un domaine affinoïde dans X , alors $\text{Hom}(V, \mathbb{A}_k^{1,an}) = \text{Hom}(V, \cup_r \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})) = \cup_r \text{Hom}_{k\text{-alg}}(k\{r^{-1}T\}, \mathcal{A}_V) = \cup_r (\mathcal{A}_V \cap \bar{D}(0, r)) = \mathcal{A}_V$.

Une fois vérifiée la coïncidence des valeurs sur les domaines k -affinoïdes, l'acyclicité de Tate nous donne la coïncidence sur tout objet de X_G .

Nous avons défini de façon très naturelle ces faisceaux structuraux : en un sens fonctoriel mais aussi de parallélisme avec la théorie des schémas dans laquelle le rôle du faisceau est centrale pour décrire l'équivalence de catégories sur les briques locales entre objets de nature algébrique et objets de nature géométrique. Comme dans le cas schématique on voudrait que ce soit un objet strictement lié à l'idée de fonction régulier. La définition suivante pour les espaces affines analytiques nous aide à comprendre quelle est la relation entre les deux approches mentionnées ci dessus.

1.14 Définition. Pour tout ouvert U dans $\mathbb{A}_k^{n,an}$ soit

$$S_U = \{f \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] : \forall x \in U, f(x) \neq 0\}.$$

Le préfaisceau des **fractions rationnelles sans pôles** sur l'espace analytique \mathcal{K} est le foncteur contravariant $\text{Ouv}(\mathbb{A}_k^{n,an}) \rightarrow \text{Ann}$ défini par localisation par la formule

$$\mathcal{K}(U) = S_U^{-1} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n].$$

Le **faisceau des fonctions analytiques** \mathfrak{D} sur l'espace $\mathbb{A}_k^{n,an}$ est le foncteur contravariant $\text{Ouv}(\mathbb{A}_k^{n,an}) \rightarrow \text{Ann}$ tel que $\mathfrak{D}(U)$ soit l'anneau ensemblistiquement constitué par les applications $f : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{H}(x)$ qui satisfont les propriétés suivantes :

1. $f(x) \in \mathcal{H}(x)$
2. Tout $x \in U$ a un voisinage ouvert $V \subset U$ avec une suite lui associée $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de fractions rationnelles sans pôles qui converges à f : en formule, quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif j tel que soit vérifié :

$$\forall i \geq j \text{ et } y \in V, |f(y) - R_i(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque. La motivation de cette définition n'est guère mystérieuse : prenons $k = \mathbb{C}$ muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$. Le faisceau des fonctions analytiques sur \mathbb{C}^n est exactement le faisceau des germes des fonctions holomorphes : en fait une limite uniforme de fonctions holomorphes reste holomorphe et ces fonctions sont caractérisés par le fait d'être fractions rationnelles sans pôles sur l'ouvert considéré.

Est très remarquable le fait que sur $|X|$ ce faisceau coïncide avec le faisceau structural défini de façon si abstraite mais il faut dire aussi que, pour k corps

ultramétrique complet, ce faisceau ne s'étend pas sur la G -topologie au faisceau structurel (rappelons la façon canonique de considérer les sections sur un fermé F en prenant la limite inductive des sections sur le système des ouverts contenant F). Par exemple l'algèbre des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n,an}}$ sur le disque unitaire fermé centré en 0 est l'algèbre de Tate $k\{T_1, \dots, T_n\}$ en tant que pour \mathfrak{D} est l'algèbre de Washnitzer de séries qui convergent au voisinage du disque.

Le faisceau des fonctions continues

De façon générale une fonction $u : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est continue si et seulement s'il existe un recouvrement localement fini par de fermés $\{F_\alpha\}$ tel que $u|_{F_\alpha}$ soit continue. Le foncteur $X_G \rightarrow \text{Ann}$ qui associe à un domaine k -analytique Y l'anneau des fonctions continues $\mathcal{C}^0(|Y|, \mathbb{R})$ est donc un faisceau en anneau pour la G -topologie de X . Cela ne marche pas avec les fonctions lisses ou linéaires par lesquelles il faudra vraiment utiliser la G -topologie. Le but de notre construction du site X_G a été en fait de pouvoir construire naturellement un faisceau de fonctions linéaires, affines ou dérivables "par morceaux", qui (à différence que dans le cas de la continuité) sont bien différent des fonctions qui satisfont globalement ces propriétés.

1.2.9 Dimension

On voudrait comprendre comment définir une courbe dans ce contexte. Nous aurons besoin pour commencer d'une notion de dimension, cohérente avec le contexte "algébrique" de notre construction. Nous utilisons le fait que pour tout algèbre affinoïde \mathcal{A} il existe une extension complète K de k telle que $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K$ soit strictement K -affinoïde. La dimension (au sens de Krull) de l'algèbre $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K$ est alors indépendante du choix de K .

1.15 Définition. Soit X un espace k -affinoïde $= \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et K une extension de k telle que $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K$ soit une algèbre strictement K -affinoïde. La **dimension analytique** de X est la dimension de l'algèbre $\mathcal{A} \widehat{\otimes}_k K$. Si X est un espace k -analytique sa **dimension analytique** est définie par

$$\dim(X) = \sup_{U \subset_a X} \{ \dim(\mathcal{O}_X(U)) \}$$

où \subset_a indique la propriété d'être un affinoïde contenu dans X .

Exemples (Un cas de dimension analytique \neq dimension de Krull). L'exemple suivant nous montre que la définition de dimension analytique n'a pas été inutilement scrupuleuse : il arrive, parfois, dans le cas d'une algèbre affinoïde non-stricte que sa dimension de Krull ne coïncide pas avec la dimension

analytique de l'espace associé.

Considérons l'algèbre $k_r := k\{rT_1, r^{-1}T_2\}/(T_1T_2 - 1)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$. Elle est l'algèbre des "séries de Laurent" convergents sur la couronne d'équation $|T| = r$ dans k . Lorsque $r \notin \sqrt{|k^\times|}$, cette algèbre est un corps (donc de dimension 0), mais pour tout r le produit tensoriel complété $k_r \widehat{\otimes}_k k_r$ est isomorphe à l'algèbre strictement k_r -affinoïde $k_r\{S_1, S_2\}/(S_1S_2 - 1)$, de dimension de Krull 1, aussi dans le cas dans lequel r n'est pas de torsion modulo le groupe des valeurs.

Par ailleurs on a une notion de dimension topologique qui est importante à retenir puisque nous arrive souvent de travailler avec la topologie. Dans le cas où X est un espace paracompact (ce que sera toujours notre cas à partir du deuxième chapitre) la dimension topologique est toujours inférieure ou égale à la dimension analytique et elles coïncident si X admet un G-recouvrement par des domaines strictement k -affinoïdes.

1.2.10 Norme spectrale

1.16 Définition. Soit $(A, \|\cdot\|)$ un anneau normé : la **semi-norme spectrale** est définie par la formule $\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|^{1/n}$ pour $f \in A$.

Elle est puissance-multiplicative ($\rho(f^i) = \rho(f)^i, \forall f \in A$) et en fait la plus grande norme bornée par $\|\cdot\|$ avec cette propriété.

1.17 Lemme. Si la norme $\|\cdot\|$ satisfait l'inégalité ultramétrique, la semi-norme spectrale est ultramétrique.

1.18 Proposition. Si \mathcal{A} est une algèbre k -affinoïde réduite alors la semi-norme spectrale est une norme et est équivalente à la norme de Banach de \mathcal{A} .

Si \mathcal{A} est une algèbre de Banach réduite alors sa norme de Banach est équivalente à la norme spectrale : existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\| \leq C\rho(f)$. Nous utiliserons cette norme pour introduire les constructions fondamentales qui forment le lien entre la géométrie de Berkovich et la géométrie formelle (réduction, fibre spéciale et générique). Il faut énoncer à ce propos la remarquable propriété que la norme spectrale d'un élément a en relation avec le comportement de cet élément-fonction :

1.19 Proposition. Soit \mathcal{A} un anneau de Banach, $f \in \mathcal{A}$ et $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors

$$\rho(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

1.3 Géométrie rigide et formelle

Comme l'histoire moderne aurait dû nous apprendre depuis longtemps, faire une révolution peut être très passionnant mais implique aussi l'incapacité (ou la grande difficulté) de garder les bonnes choses qui avaient été précédemment établie, c'est pourquoi nous remarquons avec soulagement que aussi bien la géométrie rigide que la théorie formelle qui lui correspond s'adaptent harmonieusement au nouveau contexte "à la Berkovich". Voyons comment :

1.3.1 Les points rigides

Quand on a décrit les types des points d'un disque $\mathcal{M}(k\{\frac{T}{r}\})$ nous avons fait remarquer la présence des points rigides, qui correspondent dans le cas algébriquement clos aux points de type 1 et plus en générale par définition aux idéaux maximaux (= points rigides) d'une algèbre strictement k -affinoïde $k\{\frac{T}{r}\}$. De façon plus générale (il faut supposer juste k pas trivialement valué), si notons $M(\mathcal{A})$ l'ensemble des idéaux maximaux d'une algèbre strictement k -affinoïde \mathcal{A} , on peut définir une application ensemblistique

$$\begin{array}{ccc} M(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p} & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\ \mathfrak{m}_x & \mapsto & [\chi_{\mathfrak{m}_x}] \end{array}$$

l'image étant la classe d'équivalence du caractère borné $\chi_{\mathfrak{m}_x} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}_x$ à valeurs dans le corps résiduel du point rigide. Ce corps résiduel ne nécessite pas une completion en étant déjà complet en tant que extension finie du corps k .

La fonction juste décrite est injective, a image dense et induit la topologie canonique des espaces rigides [Con, exercice 2.1.1] à partir de la topologie canonique des spectres analytiques. En autres mots on a plongé les points rigides dans un espace affinoïde et on peut toujours reconnaître un point rigide par la propriété caractérisante d'avoir comme corps résiduel une extension finie de k .

Ces considérations étant de caractère local, elles se prêtent bien au recollement et deviennent ainsi valables pour un espace k -analytique général : dans cela l'ensemble des points ayant corps résiduel fini sur k a une structure d'espace rigide.

Il a été montré par Berkovich dans [Ber2] que, si X est un espace strictement k -analytique séparé et nous y regardons le sous ensemble des points rigides $X_0 = \{x \in X : [\mathcal{H}(x) : k] < \infty\}$ avec sa structure d'espace rigide, le foncteur $X \rightarrow X_0$ est pleinement fidèle et réalise une équivalence de catégories entre espaces strictement k -analytiques paracompacts et espaces rigides quasi séparés.

On peut donc dire de façon naïve que la relation entre espaces rigides et espaces de Berkovich est que ces derniers sont obtenus en rajoutant des points

de telle façon que certaines propriétés soient mises en évidence par l'allure topologique et algébrique des espaces ainsi obtenus. Une des nouveautés les plus considérables de cette nouvelle construction est la notion de "bord".

Bords

Soit X un espace k -analytique. Le bord de X est un ensemble des points de X , et cette notion permet la compréhension à niveau topologique des propriétés de compacité, de connexité, d'irréductibilité et d'admissibilité. Nous allons justifier cette affirmation après avoir donné les bonnes définitions en commençant d'un étude sur les briques locales.

1.20 Définition. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. On dit qu'une partie fermée Γ' de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un **bord fonctionnel** de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ si elle vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{A}, \sup_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} \{|f(x)|\} = \sup_{x \in \Gamma'} \{|f(x)|\}.$$

On appelle **bord de Shilov** de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (noté $\Gamma_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$), si elle existe unique, la plus petite (par inclusion) partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ que est un bord analytique.

Dans le cas affinoïde $\Gamma_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ existe et il est fini. Il est un singleton si et seulement si la semi-norme spectrale de \mathcal{A} , ρ , est multiplicative. En ce cas elle en est l'unique élément : $\Gamma_{\mathcal{M}(\mathcal{A})} = \{\rho\}$.

Dans le cas strictement affinoïde cette propriété nous permet d'étudier un comportement globale des fonctions : si $f \in \mathcal{A}^\times$ alors $|f(x)| \leq |f(\rho)|$ et $|f^{-1}(x)| \leq |f(\rho)|$, donc $|f(x)|$ est constante pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Ceci passe seulement dans le cas où $\tilde{\mathcal{A}}$ est intégrale.

Nous disposons aussi d'une notion de **bord analytique** :

1.21 Définition. Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Il est dit **point intérieur** s'il existe une présentation de \mathcal{A} de la forme $k\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\}/\mathcal{I}$, telle que le morphisme naturel

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}(k\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\})$$

satisfait les inégalités $|T_i(\varphi(x))| < r_i, \forall i$. La partie des points dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ qui ne sont pas intérieurs, notée $\partial\mathcal{M}(\mathcal{A})$, est dite **bord analytique** ou simplement **bord**.

Un point rigide est intérieur et, dès que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ne contient aucun point rigide isolé, le bord de Shilov est contenu dans le bord.

Enfin nous avons une notion du bord "relatif", c'est à dire de bord d'un morphisme d'espaces affinoïdes :

1.22 Définition. L'intérieur est une partie ouverte et le bord est donc fermé dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme d'algèbres affinoïdes qui induit

$\mathcal{M}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}(\mathcal{A})$. φ est dite **intérieure** en $y \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ s'il réalise un isomorphisme $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\}/\mathcal{I}$ tel que le morphisme

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{M}(\mathcal{A}\{\frac{T_1}{r_1}, \dots, \frac{T_n}{r_n}\})$$

satisfait les inégalités $|T_i(\psi(y))| < r_i, \forall i$.

Est intéressante de faire remarquer que φ est sans bord si et seulement si \mathcal{B} est une \mathcal{A} -algèbre de Banach finie (dans le sens qu'il est isomorphe à un quotient de \mathcal{A}^n comme \mathcal{A} -module de Banach).

Comme on a anticipé au début de la section il y a différentes propriétés que sont en relation avec la notion de bord :

- **compacité** : Le bord est une partie fermée : c'est souvent le cas (voir l'exemple ci dessous) que en rajoutent le bord à un espace k -analytique on remédie à son défaut de compacité ;
- **connexité** : Á l'aide de la caractérisation par l'application de réduction qu'on verra dans la prochaine section on peut montrer que enlever le bord complémentaire d'un espace d'abord connexe lui fait perdre cette propriété. Ici c'est importante de considérer le bord analytique : il y a des cas où on enlève le bord de Shilov et on obtient un espace encore connexe (par exemple $\mathcal{M}(k\{S, T\}) - \eta_{Gauss}$).
- **admissibilité** : Il y a un lien entre les recouvrements ouverts d'un espace de Berkovich X et les recouvrements ouverts admissibles sur l'espace rigide sous-jacent : un recouvrement qui est admissible sur le site rigide se prolonge à un recouvrement de $|X|$.

Il arrive donc que soit la présence d'un bord à empêcher que certains relations définissant un recouvrement dans X_{rig} satisfassent une condition de recouvrement de X : le recouvrement en question ne sera donc jamais admissible.

Exemples. – *Un exemple simple et très concret de situation dans laquelle le bord se révèle d'importance fondamentale est le disque unitaire de Berkovich $X = \mathcal{M}(k\{T\})$. Soit $\eta_{0,1}$ le point de Gauss, soit $D = \{x \in \mathcal{M}(k\{T\}) : |T(x)| = 1\}$. D'après les considérations sur la norme spectrale l'intérieur de D dans $\mathcal{M}(k\{T\})$ est $D - \eta_{0,1}$ et donc le point de Gauss est l'unique élément du bord. Nous savons par ailleurs que enlevant ce point nous obtenons une infinité de composantes connexes (le point de Gauss est toujours de type (2), voir dessin). Le bord est en autre mot ce que nous permet de connecter notre espace.*

Considérons dans X_{rig} son recouvrement par disques unitaires ouverts $\mathcal{U} = \{\mathbb{D}(\alpha, 1]\}_{\alpha \in k^\circ}$. Il est bien un recouvrement, mais par contre si $D(a, 1[= \{x \in X : |a(x)| < 1, a \in k^\circ\}$ l'ensemble d'ouverts $\mathcal{V} =$

$\{D(a, 1]\}_{a \in k^\circ}$ ne recouvre pas X : on a plutôt que

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = X - \eta_{0,1} :$$

c'est exactement le bord qui manque pour recouvrir X . \mathcal{U} est en fait un recouvrement qui n'est pas admissible.

1.3.2 Schémas formels

Déjà dans le contexte de la géométrie rigide les outils de la géométrie formelle ont été utilisés et étudiés à fond notamment par Michel Raynaud [Ray]. En adoptant ce point de vue il part d'une algèbre sur l'anneau de valuation k° et il étudie son spectre formel. Il est toujours possible d'obtenir une k -algèbre de Banach par tensorisation. L'espace rigide lui associé sera appelé **fibre générique**. Les avantages de ce point de vue sont nombreuses : possibilité d'utiliser les éclatements pour rendre inversible un faisceau d'idéaux, description avec équations à coefficients entiers et donc possibilité d'étudier le \tilde{k} -schéma obtenu par réduction (et ensuite utiliser les propriétés des \tilde{k} -algèbres polynomiales pour obtenir informations sur les k -algèbres de séries), appelé **fibre spéciale**. Énonçons ici les résultats qui relient ces objets non plus en relation avec la théorie de Tate, mais dans le contexte Berkovich dans lequel on veut développer une théorie des courbes analytiques non archimédiennes.

La fibre générique

Soit \mathcal{A} une k° -algèbre topologiquement de présentation finie et plate. Soit $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$. Nous pouvons obtenir une k -algèbre de Banach par tensorisation en posant $A = \mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k$ avec la norme définie par

$$\|a\| = \inf\{|\lambda| : a \in \lambda\mathcal{A}\}.$$

1.23 Définition. La **fibre générique** de \mathcal{X} (se note \mathcal{X}_η) est l'espace strictement k -affinoïde $\mathcal{M}(A)$.

Définissons $A^\circ := \{a \in A : \rho(a) \leq 1\}$ et $A^{\circ\circ} := \{a \in A : \rho(a) < 1\}$. $A^{\circ\circ}$ est un idéal dans A° et le quotient $\tilde{A} = A^\circ/A^{\circ\circ}$ est une \tilde{k} algèbre de type fini, réduite.

La fibre spéciale

Dans les mêmes hypothèses un autre objet est de grande utilité pour l'étude de la réduction de \mathcal{X} , sa fibre spéciale :

1.24 Définition. On définit **fibre spéciale** du schéma formel $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$, le schéma affine $\mathrm{Spec}(\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k)$. Elle est notée \mathcal{X}_s .

Remarquons d'abord que, comme espaces topologiques \mathcal{X} et \mathcal{X}_s coïncident. Toutefois leur structure d'espaces annelés diffère, étant le faisceau structurel de \mathcal{X} donné par la limite projective des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}$. Il sera donc utile suivent le propriétés algébriques qui nous servent de considérer des recouvrements ouverts sur l'un ou sur l'autre des espaces.

Exemples. Soit $a \in k^\circ$ non nul. Considérons la k° -algèbre topologiquement de présentation finie $\mathcal{A}(a) = k^\circ\{T_0, T_1\}/(T_0T_1 - a)$ et le schéma formel associé $\mathfrak{S}(a) = \mathrm{Spf}(\mathcal{A}(a))$. Sa fibre générique est une couronne dans le disque unitaire de Berkovich sur k : $\mathcal{X}_\eta = \{x \in \mathbb{A}_k^{1,an} : |a| \leq |T_1(x)| \leq 1\}$ en tant que pour étudier sa fibre spéciale il faut séparer deux cas :

- Si $|a| = 1$, alors $\mathcal{X}_s = \mathrm{Spec}(\tilde{k}\{T_0, T_1\}/(T_0T_1 - \bar{a}))$, le \tilde{k} -tore $\mathbb{G}_{m, \tilde{k}}$;
- Si $|a| < 1$ sa réduction modulo k° est nulle et on obtient $\mathcal{X}_s = \mathrm{Spec}(\tilde{k}\{T_0, T_1\}/(T_0T_1))$, deux droites incidents.

1.3.3 Réduction

L'étude des fibres génériques (au sens de Berkovich) nous amène à considérer la possibilité de les réduire de façon telle à utiliser la théorie des schémas : soit $\tilde{\mathcal{X}} = \mathrm{Spec}(\tilde{A})$. On dispose d'une application de réduction naturelle $\tilde{r} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ qui envoie une semi-norme x sur le noyau de l'application induite $\tilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$.

Par ailleurs l'inclusion d'algèbres $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k} \hookrightarrow \tilde{A}$ nous donne canoniquement un morphisme dominant fini

$$\pi_{\mathcal{X}} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_s.$$

En composant \tilde{r} et $\pi_{\mathcal{X}}$ nous obtenons une deuxième application de réduction sur la fibre spéciale $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$. Explicitement cette réduction envoie une seminorme de la fibre générique sur l'idéal premier noyau de l'application induite $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$.

Les applications de réduction sont anticontinues : l'image réciproque d'une partie fermée est ouverte et vice-versa. Cette propriété à première vue bizarre est conséquence de la différente philosophie topologique des espaces de Berkovich par rapport à la théorie schématique. Par exemple si $\mathcal{A} = k^\circ\{T\}$, l'image inverse d'un point fermé de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est un disque unitaire ouvert de Berkovich dans $\mathcal{M}(k\{T\})$. L'unique point que n'appartient pas à l'image réciproque d'un point fermé est $\eta_{0,1}$. On peut généraliser cette propriété fondamentale en une proposition que devient ainsi une caractérisation du bord de Shilov :

1.25 Proposition. Si $X = \mathcal{M}(A)$ le bord de Shilov Γ_X est l'image réciproque par l'application \tilde{r} de l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}^{(0)}$ des points génériques de \tilde{X} . De plus \tilde{r} réalise une bijection de Γ_X sur $\tilde{\mathcal{X}}^{(0)}$ telle que $\kappa(\tilde{r}(x)) = \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ pour $x \in \Gamma_X$.

Nous avons aussi un résultat intéressante par rapport au bord complémentaire qui sera utile dans la suite :

1.26 Lemme. Soit X un espace k -affinoïde. Son intérieur $X - \partial X$ est l'image réciproque par \tilde{r} des points fermés dans \tilde{X} . Dans le cas particulier où $\mathcal{X} = \text{Spf}(\mathcal{A})$ alors $\mathcal{X}_\eta - \partial\mathcal{X}_\eta$ est l'image réciproque par r des k -schémas propres contenus dans \mathcal{X}_s .

L'adjectif admissible

On a déjà commencé dans ce chapitre à parler plus ou moins explicitement d'objets admissibles et dans la suite cet adjectif deviendra de plus en plus important. Peut être donc qu'il vaille la peine d'éclaircir origine, définition et emploi de cette idée si enracinée dans beaucoup de questions en géométrie analytique ultramétrique.

Dans toute la mathématique et dans la géométrie algébrique en particulier nous arrive d'avoir besoin de sous-classes d'une classe d'objets qui contient exactement les éléments qui satisfont les propriétés qui amènent aux réponses cherchées. On pourrait dire que, bien que cette propriétés puissent être très compliqués à décrire, ces entités apparaissent naturellement dans la théorie développée et se présentent au mathématicien comme les "bons objets à étudier".

C'est ainsi que Tate appelle admissibles les recouvrements dont il a besoin pour sa théorie. Par ailleurs Grothendieck donne une définition d'anneau topologique admissible, semblable à la définition d'anneaux adique. Au sens de Grothendieck A est admissible si :

- A est linéairement topologisé : il existe une base de voisinages $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de 0 qui consiste d'idéaux de A ;
- A admet un idéal de définition ;
- A est séparé et complet.

Ces anneaux sont à la base des construction en géométrie formelle. On aura besoin d'utiliser aussi la notion d'**éclatement admissible** : ceci a été introduite pour étudier le problème de décrire tout schéma formel admissible qui admet comme fibre générique un espace rigide donné. Au sens de Berkovich la situation n'est guère différent et nous utiliserons ces éclatements pour montrer relations entre certains objets géométriques formels et leurs fibres génériques.

Les éclatements admissibles sont les éclatements, dans la catégorie des S -schémas formels, des idéaux cohérents (et ouverts). Plus précisément, la définition d'un éclatement admissible est la suivante :

1.27 Définition. Soit \mathcal{X} un S -schéma formel localement topologiquement de présentation finie. Soit \mathcal{J} dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ un idéal ouvert cohérent. Alors le

S-schéma formel

$$\mathcal{X}_{\mathcal{J}} := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj} \left(\bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{J}^d \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/I^n \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \right)$$

ensemble avec la projection canonique $\mathcal{X}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{X}$ est appelé **éclatement formel** de \mathcal{J} sur \mathcal{X} . Chaque éclatement de cette forme est désigné d'éclatement **admissible**.

Une propriété remarquable des éclatements admissibles est leur commutativité avec changement de base plat. Ceci est une des motivations pour laquelle on se place dans le contexte d'une k^o -algèbre topologiquement de présentation finie et plate. Un autre raison pour faire ceci est d'éviter "mauvaises réductions" de bonnes équations. Par exemple si nous voulons décrire un disque analytique fermé comme fibre générique du schéma formel $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p\{X, Y\}/(pX + pY - p))$ serait une description tout à fait bonne de l'espace analytique mais sa fibre spéciale ne conserverait pas les relations voulues (e.g. de dimensionnalité) avec la fibre générique, étant-elle \mathbb{F}_p^2 .

Chapitre 2

Courbes analytiques de Berkovich

Cominciò in quel tempo a scrivere un *Progetto di costituzione di uno Stato Ideale fondato sopra gli alberi* in cui descriveva l'immaginaria Repubblica d'Arborea, abitata da uomini giusti.

(Italo Calvino, "Il Barone Rampante")

Appliquons les outils présentés dans le premier chapitre pour étudier le cas des courbes analytiques : c'est sur celles-ci que nous pouvons établir une convenable théorie du potentiel à l'aide d'une structure polyédrale de dimension au plus 1 leur associée, le squelette. Cette construction a l'avantage d'être extrêmement concrète, mais il faut dire aussi que n'est pas possible de la généraliser telle qu'elle en dimension ≥ 2 puisque elle relie sur une définition de fonction harmonique construite *ad hoc* sur les polyèdres de dimension inférieure.

De toute façon déjà le cas des courbes fait remarquer une structure très riche qui amène à intéressants applications : concentrons nous donc sur celle-ci en commençant par l'introduction des courbes analytiques au sens de Berkovich.

2.1 Analytifier une courbe algébrique

Une façon classique pour obtenir des espaces k -analytiques "intéressants" est de partir d'un schéma localement de type fini sur k et lui appliquer un foncteur d'analytification : si $\mathcal{X} = \text{Spec}(A)$, avec A une k -algèbre de type

fini, nous définissons un espace topologique \mathcal{X}^{an} qui est l'ensemble des semi-normes de A dont la restriction à k est la norme considérée (en général, dans le cas d'une \mathcal{A} -algèbre nous demandons qu'elle soit bornée dans \mathcal{A} mais quand ceci est un corps les deux définitions sont équivalentes) muni de la topologie induite par la topologie produit de \mathbb{R}^A (en ligne avec la définition de spectre analytique). Le cas général d'un schéma localement de type fini s'obtient enfin par recollement.

La loi $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^{an}$ s'étend à un foncteur covariant appelé **foncteur d'analytification**. Dans le cas où $k = \mathbb{C}$ la théorie de l'analytification de variétés algébriques est très bien connue et atteint son sommet dans l'article *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique* par J.P.Serre. Les nouvelles possibilités que les résultats démontrés dans cet article ont donné par rapport à l'utilisation d'outils de la géométrie analytique complexe (par exemple la théorie de Hodge) en géométrie algébrique ont été si remarquables qu'on appelle aujourd'hui *résultats de type GAGA* pour se référer à chaque théorème permettant le passage d'une catégorie d'objets de la géométrie algébrique, et de leurs morphismes à une sous-catégorie bien définie d'objets géométriques analytiques et leurs applications régulières.

Reinhardt Kiehl formule de théorèmes de type GAGA pour la géométrie analytique rigide qui sont étendu aux espaces k -analytiques par Berkovich dans le troisième chapitre de [Ber1].

Enonçons ici sans les démontrer, les résultats principaux de la théorie de l'analytification pour les espaces k -analytiques.

2.1 Proposition. Soit \mathcal{X} une variété algébrique sur k . L'espace \mathcal{X}^{an} est bon et sans bord, sa dimension k -analytique, sa dimension topologique et la dimension de Krull de \mathcal{X} coïncident (pas comme dans \mathbb{C} où la dimension de l'analytifiée double sa dimension de Krull).

Il existe un morphisme d'espaces annelés $\mathcal{X}^{an} \rightarrow \mathcal{X}$ plat et surjectif qui induit une bijection $\pi_0(\mathcal{X}^{an}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{X})$, et identifie l'ensemble des points rigides de \mathcal{X}^{an} à celui des points fermés de \mathcal{X} . L'espace topologique \mathcal{X}^{an} est séparé si et seulement si \mathcal{X} est séparée ; il est compact si et seulement si \mathcal{X} est propre, et dans ce dernier cas des théorèmes de type GAGA s'appliquent.

Rappel. Un espace analytique X est dit **bon** si chaque point $x \in X$ a un voisinage qui est un domaine affinoïde. Si on regarde comme on a défini le faisceau structurel \mathcal{O}_X on s'aperçoit qu'il se comporte comme dans le cas "schématique" seulement pour les points ayant voisinage k -affinoïde. Par exemple pour un espace que n'est pas bon $\mathcal{H}(x)$ est le complété du corps de fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Cette définition est tout à fait nécessaire lorsque disposons de nombreuses exemples d'espaces en dimension 1 qui ne sont pas bons (voir ci dessus). En devant exclure ceux-ci dans notre définition une idée pourrait être de considérer seulement les analytifiés de courbes algébriques. Cette classe est pourtant trop petite pour ce que nous voulons faire : nous verrons avec

la définition de courbe strictement k -analytique une manière plus incisive d'éliminer le cas pathologique d'espaces pas bons.

Exemples (Des espaces qui ne sont pas bons). *Soit \mathcal{X} le schéma formel obtenu en recolant deux copies de $\mathrm{Spf}(k^\circ\{T\})$ le long de l'ouvert $U = \mathrm{Spf}(k^\circ\{T, T^{-1}\})$ via les immersions canoniques. Considérons sa fibre générique X : elle est un espace strictement k -analytique recollement de deux copies du disque unité fermé $\mathcal{M}(k\{T\})$ le long du domaine k -affinoïde $\{|T| = 1\}$ (les morphismes de recollement étant encore les immersions canoniques). Le bord de Shilov de ce disque unité consiste d'un seul point η qui n'a pas de voisinage affinoïde dans X . Pour montrer ceci il faut utiliser la théorie de Raynaud : si un tel voisinage existait, on aurait pu trouver un éclatement admissible $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que \mathcal{Y} soit un $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -schéma séparé. Cet éclatement étant par définition séparé et le morphisme canonique $\mathcal{X} \rightarrow \mathrm{Spf}(k^\circ)$ ne l'étant pas, on trouve un absurde.*

On pourrait donc se demander si c'est la propriété de séparation l'unique obstruction à la bonté d'un espace k -analytique. La réponse est tout à fait négative : ils existent des espaces séparés qui ne sont pas bons. Par exemple considérons le disque unitaire en deux dimensions \mathbb{D}_2 . Le lieu de validité sur ceci de la condition " $|T_1| = 1$ ou $|T_2| = 1$ " n'est pas bon : on peut montrer (mais pas trop facilement) que le point $\sum a_{i,j} T_1^i T_2^j \mapsto \max |a_{i,j}|$ ne possède pas de voisinage affinoïde dans ce lieu.

Les espaces affines et projectif se définissent grâce à ce processus d'analytification : n'est donc pas étonnante de rencontrer la définition suivante :

2.2 Définition. *Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach.*

*Définissons $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^{n,an}$, l'espace **affine analytique** de dimension n sur \mathcal{A} , comme l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ dont la restriction à \mathcal{A} est bornée par $\|\cdot\|$.*

*De même manière définissons l'espace **projective analytique** $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}^{n,an}$ comme l'analytifié de l' \mathcal{A} -schéma propre $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}^n$.*

2.1.1 La droite affine et la projective

Considérons la droite projective sur un corps ultramétrique complet et algébriquement clos $\mathbb{P}_k^{1,an}$. Elle est un espace k -analytique purement de dimension 1, compact et sans bord. Il peut être obtenue à partir de la droite affine simplement y rajoutant un point à l'infini. Pour comprendre les types de points qu'on trouve dans la droite projective analytique on se ramène donc à étudier la droite affine analytique $\mathbb{A}_k^{1,an}$.

N'est guère difficile de classifier les points de celle ci puisque on dispose d'un atlas explicite : pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ notons $E_r := \{x \in \mathbb{A}_k^{1,an} : |T(x)| \leq r\}$. Nous avons de façon naturelle un homéomorphisme $\varphi_r : \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\}) \rightarrow E_r$ induit par la restriction des semi-normes sur $k[T]$ et on obtient ainsi l'atlas

affinoïde (E_r, φ_r) .

Par le biais de cet atlas, puisque on sait déjà classifier les points des disques, nous obtenons sans aucun effort une classification des points de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Remarquons que les différences entre types de points n'est pas seulement topologique mais a aussi une caractérisation algébrique :

2.3 Lemme (Inégalité d'Abhyankar). Soit $x \in \mathbb{A}_k^{1,an}$. Notons $s(x)$ le degré de extension résiduelle $\widehat{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}$ et $t(x)$ le rang du groupe abélien $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$. Alors vaut l'inégalité

$$s(x) + t(x) \leq 1.$$

2.4 Proposition. Soit $x \in \mathbb{A}_k^{1,an}$. Alors

- x est de type (2) si et seulement si $s(x) = 1$;
- x est de type (3) si et seulement si $t(x) = 1$.

Lorsque $s(x) = t(x) = 0$,

- x est de type (1) si $\mathcal{H}(x)$ se plonge dans $\widehat{k^{alg}}$;
- x est de type (4) autrement.

Comme corollaire nous avons que les points rigides sont tous de type (1). Le point à l'infini qu'il faudra rajouter pour obtenir $\mathbb{P}_k^{1,an}$ est aussi de type (1).

2.1.2 Courbes

La droite est comme toujours l'exemple le plus immédiat de courbe analytique : beaucoup des propriétés comme la classification des points suivant la caractérisation algébrique peuvent être prolongés, sous certaines hypothèses. Voyons alors ce que est une courbe analytique au sens de Berkovich et quels sont les cas pathologiques dont il faut faire attention.

2.5 Définition. Nous appelons *courbe k -analytique* tout k -espace analytique séparé et purement de dimension 1.

Remarquons que en dimension 1, la pureté équivaut à demander que l'espace en question n'ait pas de points rigides isolés.

Exemples.

- Les analytifiés des courbes algébriques séparés sont des courbes k -analytiques ;
- A fortiori $\mathbb{A}_k^{1,an}$ et $\mathbb{P}_k^{1,an}$ et les analytifiés des courbes elliptiques sont des courbes k -analytiques ;
- Un domaine analytique dans une courbe k -analytique est encore une courbe k -analytique ;
- Les fibres génériques des schémas formels plats, topologiquement de présentation finie et purement de dimension 1 sont des courbes k -analytiques.

Pour bien classifier les points d'une courbe X nous supposons que celle ci soit lisse : en ce cas, pour chaque point $x \in X$ il y a un morphisme étale d'un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Nous définissons le **type** du point x comme le type de l'image par un morphisme étale quelconque, celle ci ne dépend pas du choix de morphisme. De cette façon la caractérisation algébrique de la classification des points d'une courbe est égale à celle donnée par la proposition 2.4. Nous avons aussi un résultat sur la structure des anneaux locaux dans cette courbe : $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps à exception du cas dans lequel x est un point tel que $[\mathcal{H}(x) : k] < \infty$ (dans le cas strictement k -affinoïde il s'agit d'un point rigide). Dans cette situation $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau à valuation discrète.

2.1.3 Théorèmes “de type GAGA”

Regardons le premier des exemples donnés : on peut analytifier une courbe avec le procédé décrit dans le début de ce chapitre et en étudier ses propriétés de courbe de Berkovich. En autre mots nous sommes intéressés aux propriétés préservées par le foncteur d'analytification : voici une petite liste en forme de proposition.

2.6 Proposition. Soit $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme de courbes algébriques sur k . Alors f satisfait les propriétés suivantes si et seulement si le morphisme analytifié les satisfait : lisse, étale, fini, immersion fermée, immersion ouverte, isomorphisme, propre, séparé.

Si les courbes sont propres nous avons dit que des théorèmes GAGA s'appliquent. Plus précisément on a le résultat suivante :

2.7 Théorème. La restriction du foncteur d'analytification à la catégories des courbes algébriques propres est pleinement fidèle et induit une équivalence de catégories $Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \sim Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{an})$.

Nous remarquons aussi que dans le cas d'une courbe k -analytique propre (= compact et sans bord) elle est projective et chaque courbe projective X est algébrisable (i.e. existe une k -variété projective \mathcal{X} telle que $X = \mathcal{X}^{an}$). Donc on peut utiliser toujours cette équivalence en travaillant avec une courbe k -analytique propre.

2.2 Courbes strictement k -analytiques

Le contexte dans lequel on travaillerait est pourtant un peu différent. D'une côté on voudrait relaxer des hypothèses et considérer une classe de courbe k -analytiques plus grande des courbes algébrisables, d'une autre le cas affinoïde nonstricte nous amène à des pathologies assez pénibles comme le fait de devoir travailler sur des espaces pas bons (voir exemples) avec

des difficultés à considérer les tiges aux points n'ayant pas des voisinages affinoïdes. Voici la terminologie que sera employée à partir de maintenant :

2.8 Définition. *Soit k un corps ultramétrique complet. Soit $S = \mathrm{Spf}(k^\circ)$. Une **S -courbe** est un S -schéma formel localement de présentation finie, séparé, plat et purement de dimension 1. Une **courbe strictement k -analytique** est un espace strictement k -analytique, purement de dimension 1, paracompact et sans bord.*

Serait-il raisonnable de relaxer encore plus les hypothèses ne demandent pas l'hypothèse de paracompacité? Non pas si nous voulons bénéficier des outils provenant de la géométrie formelle. En fait cette requête nous assure que tout point d'une courbe strictement k -analytique admet un système fondamental de voisinages compacts de la forme \mathcal{X}_η , \mathcal{X} étant une S -courbe quasi-compacte.

De plus, en ce cas, un résultat topologique assez fort nous garantit l'absence d'ambiguïté dans la définition de bord : "Si X est une courbe strictement k -analytique, quel que soit le domaine affinoïde $V \subset X$, il y a identité entre bord analytique ∂V et bord de Shilov $\Gamma(V)$ de V ".

2.2.1 La structure de graphe réel

La structure topologique tout à fait particulière des courbes de Berkovich est beaucoup utilisée en géométrie arithmétique pour en démontrer les propriétés des équations y associés. En fait si \mathcal{X} est une courbe algébrique projective lisse sur k (corps ultramétrique complet et algébriquement clos), alors \mathcal{X}^{an} est homéomorphe à un graphe réel compact. Plus en général si C est une courbe strictement k -analytique nous pouvons montrer l'existence d'une partie de celle-ci qui est un graphe réel et d'une rétraction sur cela. Ceci sera appelé le squelette de C et nous en montrerons explicitement la construction.

Nous comprenons donc comme les notions de topologie des graphes soient de grande importance pour l'étude des courbes de Berkovich. Notamment il y a plusieurs travaux concernant le type d'homotopie de certaines courbes en relation avec la réduction et l'uniformisation de celles-ci (voir l'exemple des courbes de Tate à la fin du chapitre).

2.2.2 Courbes formelles

Nous avons vu comme la définition de courbe strictement k -analytique nous permet de travailler localement avec les fibres génériques de S -courbes quasi-compactes. Disons quelque chose sur les relations particulières qui existent entre ces courbes et leur fibre générique.

2.9 Proposition. Soit \mathcal{X} une S -courbe. L'application de réduction $\tilde{r} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ réalise une bijection des composantes connexes $\pi_0(\mathcal{X}_\eta - \Gamma(\mathcal{X}_\eta))$ sur l'ensemble des points fermés de $\tilde{\mathcal{X}}$, noté $\tilde{\mathcal{X}}^{(1)}$.

Nous avons aussi un résultat qu'on pourrait définir amusant (mais sans doute utile) sur la propriété des fibres génériques des S -courbes quasi-compactes :

2.10 Proposition. Soit \mathcal{X} une S -courbe quasi-compacte. Les composantes irréductibles de sa fibre spéciale \mathcal{X}_s sont \tilde{k} -courbes soit propres soit affines. Si au moins une est affine alors \mathcal{X}_η est un espace strictement k -affinoïde, sinon \mathcal{X}_η est un espace k -analytique propre.

2.3 Le squelette d'une courbe simplement semi-stable

Nous allons définir pour la classe des courbes strictement k -analytiques simplement semi-stables un retract appelé squelette, que sera d'importance capitale pour élaborer une théorie du potentiel sur les courbes strictement k -analytiques lisses. L'énoncé central pour aboutir à cette définition (ou plutôt auquel la définition aboutisse) est la suivante :

2.11 Théorème. Il existe pour toute S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} , un unique couple $(S(\mathcal{X}), \tau_{\mathcal{X}})$, constitué d'un polyèdre entier de dimension au plus 1 et d'une retraction $\tau_{\mathcal{X}}$ tel que :

- i) L'espace topologique $|S(\mathcal{X})|$ soit un fermé de \mathcal{X}_η ;
- ii) Pour tout ouvert U de \mathcal{X} , $S(\mathcal{X}) \cap U_\eta$ est un domaine polyédral dans $S(\mathcal{X})$ et l'immersion canonique $(\mathcal{X}|_U)_\eta \hookrightarrow \mathcal{X}_\eta$ induit un isomorphisme de $S(\mathcal{X}|_U)$ sur l'intersection $S(\mathcal{X}) \cap U_\eta$, compatible aux retractions.
- iii) Quel que soit le morphisme étale $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre courbes simplement semi-stables, p_η induit une application de $S(\mathcal{X})$ dans $S(\mathcal{Y})$ qui est un isomorphisme G -local de polyèdres entiers s'insérant dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ p_\eta \downarrow & & \downarrow p_\eta \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}) \end{array}$$

Le reste du chapitre est donc consacré à l'éclaircissement et à la définition des entités qui interviennent en cette proposition et dont on n'a pas encore parlé. Commencerons par la définition d'un polyèdre et poursuivrons avec la construction que Berkovich donne d'une courbe simplement semi-stable. Enfin nous donnerons une esquisse de preuve du théorème et en expliquerons l'importance pour la suite.

2.3.1 Polytopes et polyèdres

Donnons ici les définitions des objets polyédraux les plus convenables pour étudier ces structures dans les courbes strictement k -analytiques lisses.

Polytopes

Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie, Λ un réseau dans l'espace dual V^\vee . $\Lambda(V) := \mathbb{R} \oplus \Lambda$ engendre l'espace des fonctions affines sur V .

2.12 Définition. Un **polytope entier** dans V est la donnée d'un couple $(P, \Lambda(P))$ formé d'un ensemble non vide P et d'un sous-groupe $\Lambda(P)$ du groupe abélien des morphismes d'ensembles $\text{Mor}(P, \mathbb{R})$, appelé **groupe structural** de P , satisfaisant aux conditions :

- i) $\Lambda(P)$ contient le sous groupe \mathbb{R} des fonctions constantes ;
- ii) Le quotient $\Lambda(P)/\mathbb{R}$ est un groupe abélien libre de type fini ;
- iii) Notant $\Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ le sous espace vectoriel de $\text{Mor}(P, \mathbb{R})$ engendré par $\Lambda(P)$, l'application $\iota : P \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}(P)^\vee$ réalise une bijection de P sur une partie compacte de l'hyperplan $\{u \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)^\vee : u(1) = 1\}$. Cette partie est définie par un nombre fini d'inégalités $u(\varphi_i) = 0$, $\varphi_i \in \Lambda(P)$.

L'ensemble P est muni de la topologie plus faible qui fait de ι un homéomorphisme.

Les **faces** d'un polytope entier P sont les parties non vides de P définies par une équation de la forme $\varphi = 0$ avec $\varphi \in \Lambda(P)$ fonction positive sur P . La **dimension** d'un polytope entier P est définie comme le rang du groupe abélien libre $\Lambda(P)/\mathbb{R}$.

Les fonctions qui nous sommes intéressés à étudier sont les fonctions affines par morceaux : définissons donc d'abord les "morceaux"

2.13 Définition. Un **sous-polytope entier** d'un polytope entier P est une partie nonvide de P définie par un nombre fini d'inéquations de la forme $0 \leq \varphi$ avec $\varphi \in \Lambda(P)$. Une **décomposition élémentaire** d'un polytope entier P est la donnée d'une famille finie \mathcal{D} de sous-polytopes entiers de P vérifiant les conditions suivants :

- i) pour tout $Q \in \mathcal{D}$ chacune des faces de Q appartient à \mathcal{D} ;
- ii) pour tous $Q, Q' \in \mathcal{D}$, $Q \cap Q' = \emptyset$ ou est une face commune à Q et à Q' ;
- iii) P est la réunion des $Q \in \mathcal{D}$.

et ensuite les fonctions affines par ces "morceaux".

2.14 Définition. Soit P un polytope entier. Une application continue $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **affine par morceaux** s'il existe une décomposition élémentaire \mathcal{D} de P telle que, pour tout $Q \in \mathcal{D}$, la restriction de f à Q appartienne à

$\Lambda_{\mathbb{R}}(Q)$. L'ensemble des fonctions affines par morceaux sur P est noté $A^0(P)$ et il est un \mathbb{R} espace vectoriel. $A_{\mathbb{Z}}^0(P)$ désigne le sous-groupe abélien des fonctions continues et affines par morceaux f pour lesquelles il existe une décomposition élémentaire de P telle que $f|_Q \in \Lambda(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{D}$.

Polyèdres

Nous allons définir les polyèdres en recollent plusieurs polytopes entre eux : comme toujours quand il s'agit de recoller est utile la bonne définition d'un atlas.

2.15 Définition. Soit S un espace topologique séparé dont les composantes connexes sont dénombrables à l'infini. Un **atlas** \mathbb{Z} -polyedral est la donnée d'une famille τ de triplets (V, P, φ) où V est une parite compacte de S , P est un polytope entier et $\varphi : V \rightarrow P$ est un homéomorphisme satisfaisant :

- i) pour tous (V, P, φ) et $(V', P', \varphi') \in \tau, V \cap V' = \emptyset$ où $\varphi(V \cap V')$ est un sous-polytope entier de P et $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ induit un isomorphisme de polytopes entiers entre $\varphi(V \cap V')$ et $\varphi'(V \cap V')$;
- ii) pour tout point $x \in S$, il existe $(V_1, P_1, \varphi_1), \dots, (V_n, P_n, \varphi_n) \in \tau$ tels que $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ et que $V_1 \cup \dots \cup V_n$ soit un voisinage de x dans S ;
- iii) pour tout compact K dans S , il n'existe qu'un nombre fini de cartes $(V, P, \varphi) \in \tau$ telles que $\varphi(V) \cap K \neq \emptyset$.

Deux atlas \mathbb{Z} -polyédraux τ et τ' sont dit **équivalents** si la réunion $\tau \cup \tau'$ est encore un atlas \mathbb{Z} -polyedral sur S . Avec ceci on définit enfin un **polyèdre entier** comme la donnée d'un espace topologique séparé S et d'une classe d'équivalence d'atlas \mathbb{Z} -polyédraux sur S .

La dimension d'un polyèdre entier S en un point x , $\dim_x(S)$, est le maximum des dimensions des polytopes figurant dans un atlas \mathbb{Z} -polyedral et contenant x . La dimension de S est enfin définie comme $\dim(S) = \sup_{x \in S} \{\dim_x(S)\}$. Une application $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **affine par morceaux** s'il existe un atlas structurale \mathbb{Z} -polyedral τ tel que, pour tout $(V, P, \varphi) \in \tau, f \circ \varphi^{-1} \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$. L'espace vectoriel réel des fonctions affines par morceaux sur S est noté $A^0(S)$ et désignons par $A_{\mathbb{Z}}^0(S)$ le sous-groupe des f telles que $f \circ \varphi^{-1} \in \Lambda(P)$ pour chaque charte.

La topologie de Grothendieck des polyèdres

La classe des fonctions harmoniques que nous sommes intéressés à étudier est une sous-classe des fonctions affines par morceaux. Puisque ces "morceaux" sont des parties fermés, nous nous retrouvons dans la nécessité de, rencontrée déjà au chapitre 1, de modifier l'idée d'objet locale. En se rappellent de ce qu'on a fait avec le domaines k -affinoïdes on s'aperçoit que est très naturelle l'introduction d'une topologie de Grothendieck sur

un polyèdre, où les recouvrement seront définis en relations aux objets qui représentent mathématiquement nos "morceaux" : les sous-polytopes.

2.16 Définition. *Soit S un polyèdre entier. Un **domaine polyédral** dans S est une partie $S' \subset S$ qui est la réunion d'une famille localement finie de sous-polytopes entiers.*

La catégorie S_G dont les objets sont les domaines polyédraux de S et les morphismes les inclusions peut être munie d'une topologie de Grothendieck naturelle engendrée par les recouvrements localement finis par des sous-polytopes. On peut démontrer que le foncteur qui prolonge la correspondance $S' \mapsto A^0(S')$ est un faisceau en espaces vectoriels sur S_G . Nous allons définir dans le chapitre 3 un préfaisceau en espaces vectoriels des fonctions harmoniques pour cette topologie de Grothendieck. Sera ainsi facile, après avoir remarqué l'existence, dans une courbe strictement k -analytique lisse, des polyèdres (plus ou moins cachés) dont la structure de site est compatible à la structure de site de X_G , de reconstruire un faisceau analogue pour la G -topologie de la courbe.

2.3.2 Courbes élémentaires

Reprenons l'algèbre $\mathcal{A}(a) = k^\circ\{T_0, T_1\}/(T_0T_1 - a)$ de l'exemple du paragraphe 1.3.2. Rappelons nous d'avoir noté son spectre formel $\mathfrak{S}(a)$. Courbes formelles de cette forme sont appelées **courbes élémentaires** d'élément a . Leur fibre générique est une couronne dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$ et elle contient des semi-normes que nous amèneront à une construction explicite du squelette : fixons $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e_1e_2 = |a|$. L'application sur $k\{T_0, T_1\}$ définie par

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}^2} a_\nu(f) T_0^{\nu_0} T_1^{\nu_1} \mapsto \max_{\nu \in \mathbb{N}^2} |a_\nu(f)| e^{\nu_0} e^{\nu_1}$$

se restreint à une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$, c'est-à-dire un point de la fibre générique $\mathfrak{S}(a)_\eta$ noté η_e .

Nous allons définir un polytope entier associée à chaque courbe élémentaire $\mathfrak{S}(a)$ de façon abstraite en donnant une couple de la forme (ensemble, groupe structurale). Ceci satisfait toute propriété du théorème [2.11].

Commençons en définissant un polytope entier qui dépend seulement de la valeur de a en donnant le couple $(S(|a|), \Lambda(S(|a|)))$ avec

$$S(|a|) = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 : t_0, t_1 \geq 0 \text{ et } t_0 + t_1 = -\log |a|\};$$

$$\Lambda(S(|a|)) = \mathbb{R} \oplus t_0\mathbb{Z} \oplus t_1\mathbb{Z} / \langle \log |a| + t_0 + t_1 \rangle.$$

En pratique il s'agit d'un point lorsque $|a| = 1$ et d'un segment lorsque $0 < |a| < 1$. Le groupe $\Lambda(S(|a|))$ est structural par construction et il engendre

2.3. LE SQUELETTE D'UNE COURBE SIMPLEMENT SEMI-STABLE 37

tout l'espace vectoriel des fonctions réelles $S(|a|) \rightarrow \mathbb{R}$.

Les applications

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(a)_\eta & \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (-\log |T_0(x)|, -\log |T_1(x)|) \\ S(|a|) & \xrightarrow{\iota} \mathfrak{S}(a)_\eta \\ (t_0, t_1) & \mapsto \eta_{(e^{-t_0}, e^{-t_1})} \end{aligned}$$

sont continues, μ est à valeurs dans $S(|a|)$ et ι est une section de μ qui réalise donc un homéomorphisme de $S(|a|)$ sur une partie fermée de la fibre générique. Cette partie est notée $S(\mathfrak{S}(a))$ et appelée **squelette** d'une courbe élémentaire et $\iota \circ \mu$ est une rétraction de $\mathfrak{S}(a)_\eta$ sur $S(|a|)$, notée τ .

Le squelette jouit de bonnes propriétés fonctorielles de façon telle que pour toute extension non-archimédienne complète K de k , $S(\mathfrak{S}(a) \times_{\mathrm{Spf}(k^\circ)} \mathrm{Spf}(K^\circ))$ soit isomorphe à $S(\mathfrak{S}(a))$. Nous disposons d'une caractérisation topologique très intéressante pour énoncer laquelle il nous faut une définition :

2.17 Définition. *Un espace k -affinoïde X est dit **potentiellement isomorphe au disque unitaire** s'il existe une extension finie et séparable k' de k telle que l'espace k -affinoïde $X \times_k k'$ soit isomorphe à une somme finie de copies du disque unité fermé dans $\mathbb{A}_{k'}^{1, \mathrm{an}}$.*

Cette notion nous permet de redéfinir le squelette d'une courbe élémentaire :

2.18 Proposition. *Quelque soit $0 \neq a \in k^\circ$ le squelette d'une courbe élémentaire d'élément a est le complémentaire de l'ensemble des points de $\mathfrak{S}(a)_\eta$ ayant un voisinage k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unitaire.*

2.3.3 Courbes simplement semi-stables

La généralisation successive du squelette doit être faite dans la classe des courbes "simplement semi-stables". Celles-ci sont décrites à partir des courbes élémentaires et leur dénomination pourrait être d'abord considérée inopportune. Nous monterons qu'elle ne l'est pas.

2.19 Définition. *Une S -courbe \mathcal{X} est dite **simplement semi-stable** s'il existe un recouvrement par des ouverts U admettant pour chacun d'eux un morphisme étale vers une courbe élémentaire $p_U : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a_U)$.*

Comme déjà la notation suggère n'est pas requis que a_U soit indépendante de U . Motivons, comme promis, l'appellation "simplement semi-stable" : "simplement" car la topologie pour laquelle considérons le recouvrement est celle de Zariski et "semi-stable" car est équivalent de demander que \mathcal{X}_η soit lisse et que \mathcal{X}_s soit une courbe ayant composantes irréductibles lisses et éventuelles singularités qui sont points doubles ordinaires.

2.3.4 Preuve du théorème d'existence du squelette

Soit \mathcal{X} une courbe simplement semi stable. Nous commençons par exhiber un polyèdre candidat à être notre squelette. Nous sera utile la caractérisation du squelette dans le cas des courbes élémentaires :

2.20 Définition. *Pour toute S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} , nous notons $S(\mathcal{X})$ le fermé de \mathcal{X}_η complémentaire de la réunion des domaines k -affinoïdes potentiellement isomorphe au disque unitaire et contenus dans $\mathcal{X}_\eta - \Gamma(\mathcal{X}_\eta)$.*

Nous avons ainsi l'ensemble qu'on veut faire devenir le squelette. Nous devons maintenant le munir d'une structure polyédrale par le biais d'un atlas \mathbb{Z} -polyédrale. Aucune surprise dans le fait que nous nous posons pour faire ceci dans un contexte locale en utilisant les morphismes étales dont on dispose par définition de semi-stabilité simple. Nous devons pourtant considérer un recouvrement \mathcal{U} de \mathcal{X} construit *ad hoc*. Nous demandons que ceci satisfasse :

- chaque $U \in \mathcal{U}$ contient au plus un point singulier de \mathcal{X}_s ;
- l'intersection de deux ouverts distincts $U, V \in \mathcal{U}$ ne contient pas de points singuliers.

Remarque. Nous avons employé dans ce choix un petit abus de notation : il faut rappeler en fait que \mathcal{U} peut être considéré aussi comme recouvrement de la fibre spéciale \mathcal{X}_s , étant son espace topologique sous-jacent le même que $|\mathcal{X}|$ et donc les conditions sont bien posées une fois enlevée l'ambiguïté. Nous croyons soit plus correct définir \mathcal{U} comme recouvrement de la S -courbe \mathcal{X} en raison du fait que pour montrer certains résultats dans la suite il faudra considérer la fibre générique du schéma formel $\mathcal{X}|_U$ obtenu par restriction à un ouvert de \mathcal{U} .

Pour avoir l'atlas \mathbb{Z} -polyédrale nous introduisons une structure de réseau qui "normalise" le polyèdre qu'on veut définir : nous appelons $\Lambda_k(\mathcal{X})$ le sous-groupe du $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ image de l'homomorphisme de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \otimes_{k^\circ} k)^\times & \rightarrow & C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \log |f| \end{array} .$$

La correspondance $\mathcal{X} \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{X})$ se prolonge à un foncteur $\{S\text{-Courbes}\} \rightarrow \{Groupes\}$ et dans le cas d'une courbe élémentaire le groupe $\Lambda_k(\mathfrak{S}(a))$ s'identifie à celui engendré par $\log(|k^\times|)$, $\log(|T_0|)$ et $\log(|T_1|)$. Notons enfin $\Lambda(\mathcal{X})$ le sous-groupe de $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ engendré par les constants \mathbb{R} et $\Lambda_k(\mathcal{X})$.

Or, pour une couple d'ouverts distincts U, V dans \mathcal{U} , l'intersection $U \cap V$ est un ouvert irréductible et lisse de \mathcal{X}_s , $S(\mathcal{X}_{U \cap V})$ est réduit au point de $\Gamma(\mathcal{X}_\eta)$ au dessus du point générique de $U \cap V$. Le morphisme induit par l'inclusion $U \cap V \hookrightarrow U$ sur les polytopes fondamentaux

$$(S(\mathcal{X}_{U \cap V}), \Lambda(\mathcal{X}_{U \cap V})) \hookrightarrow (S(\mathcal{X}_U), \Lambda(\mathcal{X}_U))$$

est une immersion canonique de 0-faces (=points extrémaux) . Nous avons donc trouvé notre candidat atlas \mathbb{Z} -polyédral : il est donné par la collection des $(S(\mathcal{X}|_U), \Lambda(\mathcal{X}|_U))$. Qu'il donne tout à fait une structure polyédrale il est garanti par un résultat qui nous dit aussi comment choisir l'élément $a|_U, U \in \mathcal{U}$:

2.21 Proposition. Soit U un ouvert $\in \mathcal{U}$. Soit a_U tel que :

- $|a_U| = 1$ si U est lisse ;
- $0 < |a_U| < 1$ si U contient un point singulier de \mathcal{X}_s .

Alors pour tout morphisme étale $p : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a_U)$ l'homomorphisme fonctionnellement obtenu $\Lambda(p) : \Lambda_k(\mathfrak{S}(a)) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{X}|_U)$ est en fait un isomorphisme.

La proposition nous dit que nous avons choisi le recouvrement \mathcal{U} de façon telle que l'espace topologique $S(\mathcal{X}|_U)$ est réduit à un point si U est lisse et un segment $\cong [0, 1]$ si U contient un point singulier de la fibre spéciale.

En recollant ces polytopes le long de l'atlas \mathbb{Z} -polyédrale on obtient que l'espace topologique $S(\mathcal{X})$ est exactement le graphe dual de la \tilde{k} -courbe algébrique \mathcal{X}_s : à chaque composante irréductible de \mathcal{X}_s correspond un sommet, et à chaque point singulier une arête qui relie les deux sommets correspondants (resp. se recolle en un cercle sur le sommet correspondant) si ce point singulier appartient à deux composantes (resp. n'appartient qu'à une composante).

Nous sommes donc parvenus à exhiber une partie fermée de \mathcal{X}_η avec une structure polyédrale. Montrons que celle-ci satisfait toutes propriétés énoncées dans le théorème en commençant par le point (ii).

2.22 Lemme. Pour tout ouvert U de \mathcal{X} et tout morphisme étale $p : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a_U)$ nous avons les égalités ensemblistiques

$$S(\mathcal{X}) \cap (\mathcal{X}|_U)_\eta = S(\mathcal{X}|_U) = p^{-1}S(\mathfrak{S}(a_U)).$$

Démonstration. Prouvons la première égalité : si $V \subset \mathcal{X}_\eta - \Gamma(\mathcal{X}_\eta)$ est un domaine k -affinoïde connexe et potentiellement isomorphe au disque unitaire. En rappellent l'anticontinuité de l'application de réduction $r(V)$ est une partie constructible et connexe de $\mathcal{X}_s - \mathcal{X}_s^{(0)}$, en autre mots un point fermé. Par passage au complémentaire et en observent que $r^{-1}(\tilde{x})$ est la réunion d'une suite croissante de domaines k -affinoïdes potentiellement isomorphes au disque unitaire pour tout \tilde{x} point fermé de \mathcal{X}_s , on obtient $S(\mathcal{X}|_U) = S(\mathcal{X}) \cap U_\eta$.

Pour la deuxième nous utilisons un résultat qui dit que si $V \subset \mathcal{X}_\eta$ est domaine k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unitaire il en est de même pour $p(V)$ et, réciproquement si $Z \subset \mathfrak{S}(a)_\eta$ est domaine k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unitaire et sa fibre $p^{-1}(Z)$ est non-vide, il en est de même pour celle-ci.

□

Nous allons maintenant décrire la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$ de façon locale en considérant, comme on a fait pour donner la structure polyédrale, un recouvrement avec des requêtes particulières. Soit \mathcal{U} un recouvrement d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} par des ouverts connexes tels que :

- chaque U contient au plus un point singulier de \mathcal{X}_s ;
- si $U, V \in \mathcal{U}$ sont deux ouverts distincts, $U \cap V$ ne contient aucun point singulier de \mathcal{X}_s ;
- il existe, pour tout $U \in \mathcal{U}$, un morphisme étale $p_{U,\eta} : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a_U)$ avec $a(U) \in k^o - \{0\}$.

Nous pouvons montrer que donné un tel recouvrement il existe pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ une unique application $\tau_U : (\mathcal{X}|_U)_\eta \rightarrow S(\mathcal{X}|_U)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}|_U)_\eta & \xrightarrow{\tau_U} & S(\mathcal{X}|_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{S}(a(U))_\eta & \xrightarrow{\tau} & S(\mathfrak{S}(a)) \end{array}$$

commute, les flèches verticales étant obtenue fonctoriellement par les morphismes étales locaux de définition. Pour tout $U \in \mathcal{U}$ la restriction de τ_U à $S(\mathcal{X}|_U)$ est l'identité.

On recolle toutes ces applications en une rétraction $\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$ en observent que si $U, V \in \mathcal{U}$ sont deux ouverts distincts, $U \cap V$ est par choix du recouvrement un ouvert irréductible sans point singuliers. $(\mathcal{X}|_{U \cap V})_\eta$ est par conséquent envoyé par chacune des rétractions τ_U, τ_V sur le point de $\Gamma(\mathcal{X}_\eta)$ au dessus du point générique de $U \cap V$.

Il reste à vérifier que cette rétraction ne dépend pas du choix de la collection des morphismes étales : observons pour ceci que, quelque soient les points distincts $x, y \in S(\mathcal{X})$, de domaines k -affinoïdes V, W ayant la propriété $\Gamma(V) = \{x\}, \Gamma(W) = \{y\}$ sont nécessairement disjoints. Par ailleurs pour tout $x \in \mathcal{X}_\eta$ nous pouvons caractériser $\tau_{\mathcal{X}}(x)$ comme l'unique point de Shilov d'un convenable domaine k -affinoïde connexe dans \mathcal{X}_η .

Ainsi nous avons prouvé le point i) du théorème. Nous reste enfin à en démontrer le troisième : on se reconduit d'abord, en travaillent localement sur un recouvrement ouvert convenable de \mathcal{Y} , au cas dans lequel \mathcal{Y} est une courbe élémentaire. Dans ce cas, le diagramme avec lequel nous avons défini la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$ nous donne la commutativité du diagramme du théorème et l'inclusion $p_\eta(S(\mathcal{X})) \subset S(\mathfrak{S}(a))$ découle du lemme 2.22. Voici achevée la preuve du théorème.

Ce résultat nous donne la possibilité de travailler de façon plus concrète sur les polyèdres pour définir des faisceaux sur la fibre générique d'une courbe simplement semi-stable. Pour définir un faisceau de fonctions harmonique il faut rajouter encore quelque chose : un poids sur $S(\mathcal{X})$ que lui donne une

2.3. LE SQUELETTE D'UNE COURBE SIMPLEMENT SEMI-STABLE 41

structure de polyèdre pondéré. Ceci est donné par le biais de l'application

$$\pi_0(S(\mathcal{X}) - \Gamma(\mathcal{X}_\eta)) \xrightarrow{\sim} \text{Sing}(\mathcal{X}_s) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui associe à chaque point singulier de la fibre spéciale \tilde{x} l'entier positif $[\kappa(\tilde{x}) : \tilde{k}]$, la bijection à gauche étant donnée par la réduction $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$.

Propriétés du squelette

Si on se pose dans la catégorie des polyèdres entiers nous pouvons remarquer une couple de propriétés très intéressantes que nous montrent la canonicité de la définition de squelette :

- Le polyèdre entier est le noyau de $\coprod_{(U,V) \in \mathcal{U}} S(\mathcal{X}|_{U \cap V}) \xrightarrow{\longrightarrow} \coprod_{U \in \mathcal{U}} S(\mathcal{X}|_U)$;
- Tout recouvrement de \mathcal{X} par des ouverts connexes contenant chacun au plus un des points singuliers de \mathcal{X}_s définit une décomposition élémentaire du polyèdre $S(\mathcal{X})$ sur laquelle le poids est constante.

2.3.5 Un squelette nontriviale : les courbes de Tate

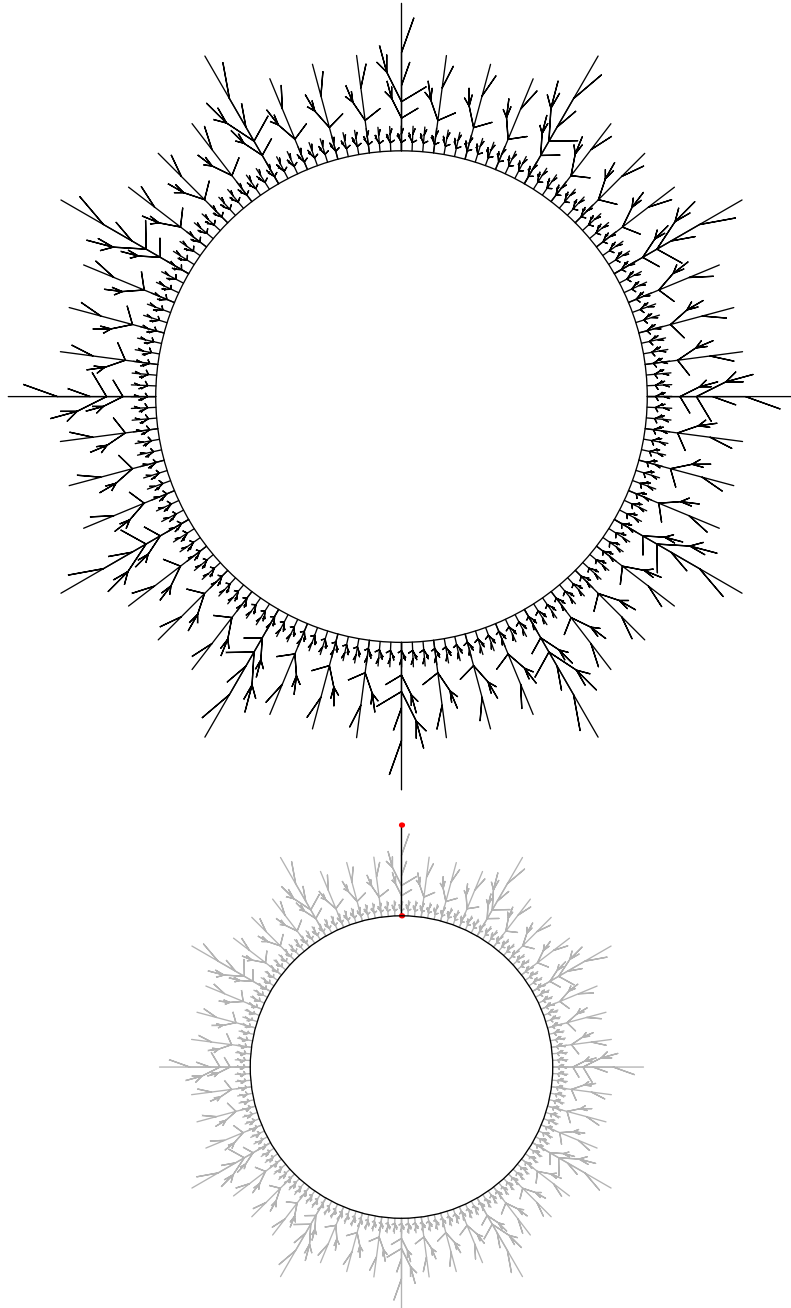
Voici un exemple de courbe avec squelette nontriviale : l'étude de l'uniformisation d'une courbe elliptique a été la motivation à la base de la recherche d'une notion de variété analytique sur un corps non archimédien et par conséquent du développement de la théorie rigide. Les calculs de Tate montraient en fait la possibilité d'uniformiser certaines courbes elliptiques p -adiques par le groupe multiplicatif k^\times et lui ont amené à la recherche d'un endroit idéal pour l'étude systématique de ces phénomènes.

Les courbes admettant cette uniformisation ont été appelé "de Tate" et dans la théorie de Berkovich cette propriété admet une caractérisation en termes de type d'homotopie : soit X l'analytifié de la courbe elliptique $\mathcal{X} = \text{Spec}(\frac{k[X,Y]}{Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)})$ avec $0 < |\lambda| \leq 1$ et $|1 - \lambda| = 1$. Toute courbe elliptique peut être décrite de cette façon et distinguerons entre deux cas :

- si $\lambda \in (k^o)^\times$, \mathcal{X} est dite **à bonne réduction** ;
- si $\lambda \in k^{oo} - \{0\}$, \mathcal{X} est dite **courbe de Tate**.

Nous pouvons comprendre la structure du squelette de \mathcal{X} en considérant un recouvrement de la droite affine par la courbe elliptique $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}_k^{1,an}$ explicitement donné par le morphisme $k[X] \rightarrow \frac{k[X,Y]}{Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)}$ composition d'inclusion et projection canonique. Ce recouvrement à deux feuillets est ramifié au dessus des points $0, \lambda$ et 1 . L'idée est alors d'étudier le squelette \mathcal{S} de $\mathbb{A}_k^{1,an} - \{0, \lambda, 1\}$ et son antécédent $\pi^{-1}(\mathcal{S})$. Ce dernier contient le squelette de \mathcal{X} , puisque \mathcal{X} se peut rétracter sur $\pi^{-1}(\mathcal{S})$. Pour une courbe de Tate on peut montrer que $\pi^{-1}(\mathcal{S})$ n'est pas contractile et donc son squelette n'est pas triviale. Une visualisation possible de cette courbe est dans les dessins suivantes (pour lesquels je remercie Lorenzo Fantini) : le premier fait voir la structure de la courbe : un cercle sur chaque point du quel se ramifie une

disque $\cong \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$. Dans le deuxième il est souligné le squelette de cette courbe.



Chapitre 3

Théorie du potentiel

L'harmonie invisible vaut mieux
de celle qui est visible.

(Héraclite d'Ephèse)

Que est-ce que c'est la théorie du potentiel? Le nom vient de la physique où on introduit un champ de force sur un espace vectoriel réel V et on dit qu'il est le gradient d'une fonction $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ qu'on appelle "potentiel". Connaître cette fonction nous permet d'étudier les équilibres d'un système en résolvant une équation aux dérivées partielles de la forme $\nabla\psi := \sum \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} = 0$, l'**équation de Laplace**. Classiquement on appelle **fonctions harmoniques** les fonctions qui satisfont cette équation.

Avec la théorie des variétés différentiables réelles et complexes la poursuite de l'étude des fonctions harmoniques a atteint des résultats remarquables. Par exemple il a été montré qu'une fonction réelle h sur une surface de Riemann est harmonique **si et seulement si** elle coïncide localement avec la partie réelle d'une fonction holomorphe g . Puisque $\Re(g) = \log|\exp(g)|$ on peut reformuler la condition demandant que h soit localement de la forme $\log(|f|)$ pour f fonction holomorphe inversible.

Même si est possible de transposer cette propriété dans le contexte non archimédien, nous verrons que des fonctions ainsi définies ne satisfont pas les propriétés axiomatiques des fonctions harmoniques : il faudra utiliser la notion de squelette introduite au chapitre précédent et essayer de le prolonger à une classe de courbes plus grande possible par le biais d'un théorème de réduction semi-stable.

3.1 Théorie classique

La théorie du potentiel classique est développée sur un espace vectoriel réel : nous appelons harmonique dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N une fonction

$h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h \in C^2(\Omega)$ et $\nabla h = 0$. Chaque fonction harmonique est analytique au sens réel et les problèmes qui interviennent dans la théorie du potentiel réelle présentent des affinités avec les propriétés des fonctions holomorphes en une ou plusieurs variables (dans le premier cas, $N=2$, la relation entre les deux est explicite comme anticipé dans l'introduction de ce chapitre).

Les propriétés des fonctions harmoniques sont remarquables et, ce qui est mieux, les caractérisent : h est harmonique dans Ω si et seulement si elle satisfait la **propriété de la moyenne sphérique** : pour tout $x \in \Omega$ la valeur moyenne de h sur le bord d'une boule fermée centrée en x et contenue dans Ω est égal à $h(x)$. Le **principe du maximum** découle de celle-ci : si h harmonique atteint un extrême local au point $x \in \Omega$, alors h est constante au voisinage de x .

Le **problème de Dirichlet** classique peut être ainsi formulé : "Donnée une fonction continue $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ trouver une fonction h harmonique sur Ω telle que pour tout $y \in \partial\Omega$, $h(x) \rightarrow f(y)$ pour $x \rightarrow y$ ".

Les **inégalités d'Harnack** donnent une estime de la valeur $\frac{h(x)}{h(x_0)}$ où h est une fonction harmonique sur une boule $B(x_0, r)$ et x un point quelconque de cette boule. En peu de mot elles donnent une estime de la "rigidité" d'une fonction harmonique. Une approche axiomatique aux fonctions harmoniques doit prendre en compte ces propriétés qui sont à la base de la plupart des résultats en théorie du potentiel.

3.1.1 Fonctions sous-harmoniques

Si les fonctions harmoniques sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sont caractérisés comme les fonctions de $C^0(\Omega)$ ayant valeurs finies et satisfaisant la propriété de la moyenne sphérique, classiquement les fonctions sous-harmoniques satisfont seulement une moitié de ces propriétés : elles sont supérieurement finies, supérieurement semi-continues et ils satisfont une inégalité de la forme $s(x) \leq \mu(s; x, r)$ où μ est la moyenne des valeurs de la fonction au bord d'une boule. Elles ont été très utilisées pour démontrer importants résultats concernant les fonctions harmoniques parce que plus souples que ces dernières (elles ne sont pas forcément analytiques et peuvent être convenablement déformés en restant sous-harmoniques) et notamment sont utilisés pour montrer l'existence d'une résolution globale pour le problème de Dirichlet. Le cas non archimédien n'est point différent et on aura donc besoin de définir aussi les fonctions sous-harmoniques pour une courbe strictement k -analytique lisse. Enonçons ici la définition classique pour la pouvoir confronter avec sa analogue en Berkovich :

3.1 Définition. Une fonction $s : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est appelé **sous-harmonique** sur Ω si

- i) s est supérieurement semi-continue sur Ω ;

- ii) $s(x) \leq \mu(s; x, r)$ pour tout $B(x, r) \subset \Omega$;
- iii) s n'est pas la fonction constante $-\infty$ sur toute composante connexe de Ω .

3.1.2 Capacités et théorème de Fekete-Szegö

Soit M une surface de Riemann compacte et Ω un ouvert dans M . Soit en outre D un diviseur sur M à support contenu dans Ω . La théorie du potentiel classique sur une surface de Riemann montre l'existence d'une unique fonction sous-harmonique $s_{D,\Omega}$ telle que :

- $s_{D,\Omega}$ est harmonique sur $\Omega - |D|$;
- l'ensemble E des points $z \in M - \Omega$ tels que $s_{D,\Omega} \neq 0$ est un sous-ensemble polar (dans le sens qu'il existe un ouvert contenant E et une fonction super-harmonique sur cet ouvert qui vaut $+\infty$ sur E) de $\partial\Omega$;
- pour tout voisinage V de $|D|$ et toute fonction holomorphe f sur V telle que $\text{div}(f) = D$, la fonction $s_{D,\Omega} - \frac{1}{\log|f|^2}$ est harmonique sur V .

Cette fonction $s_{D,\Omega}$ nous permet de définir une métrique sur le fibré $\mathcal{O}_M(D)$ par la formule

$$\|1_D\|_K^2(z) = \exp(-s_{D,\Omega}(z))$$

où 1_D désigne la section globale canonique de $\mathcal{O}_M(D)$. Cette métrique est appelée **métrique capacitaire** définie par Ω .

Nous avons défini cette notion parce qu'elle est liée à un résultat assez surprenant, en considérant tout simplement la sphere de Riemann e $f = id$:

3.2 Théorème (Fekete-Szegö). Pour tout A sous-ensemble de \mathbb{C} soit $FS(A)$ l'ensemble des entiers algébriques ayant chaque conjugué (algébrique) dans A . Soit K un sous-ensemble compact de \mathbb{C} invariant pour conjugaison complexe. Alors :

- si $\|1\|_K < 1$, $FS(K)$ est un ensemble fini ;
- si $\|1\|_K \geq 1$, $FS(K)$ est infini pour out ouvert contenu dans K .

3.1.3 Fonctions harmoniques sur les polyèdres

L'étude des fonctions harmoniques sur une courbe strictement k -analytique lisse est toujours ramené à l'étude de ces fonctions sur un polyèdre entier de dimension 1. Nous allons expliciter, à l'aide du théorème de réduction semi-stable, ce procédé dans la prochaine section. Pour cela nous aurons besoin de décrire la théorie sur les polyèdres.

3.3 Définition. Soit S un polyèdre entier de dimension au plus 1. Pour chaque point $x \in S$ tel que $\dim_x S = 1$ on peut trouver des sous polytopes entiers V_1, \dots, V_n qui satisfont les propriétés :

- i) $\dim(V_i) = 1$;
- ii) x est une face de V_i pour tout i et $V_i \cap V_j = \{x\}$ si $i \neq j$;

iii) $V := V_1 \cup \dots \cup V_n$ soit un voisinage de x dans S ;
 L'ensemble $\{V_1, \dots, V_n\}$ est appelé une **étoile** de x .

Le voisinage V de x est toujours homéomorphe à l'amalgamé en 0 de n copies de $[0, 1]$. Ceci justifie la définition suivante :

3.4 Définition. *Quelque soit le choix de l'étoile de x , l'ensemble $T_x S := \pi_0(V - \{x\})$ est indépendant de cela. Il est appelé **cône tangent** à S en x .*

La notion de poids viens de façon naturelle si on se propose définir des fonctions harmoniques.

3.5 Définition. *Soit S un polyèdre entier de dimension au plus 1. On appellera **décomposition élémentaire** de S un atlas \mathbb{Z} -polyédral \mathcal{D} qui satisfait les conditions :*

- i) *Stabilité pour passage aux faces : pour tout sous-polytope $P \in \mathcal{D}$ et toute face P' de P , $P' \in \mathcal{D}$;*
- ii) *Intersection minimale : pour tout sous polytopes $P, P' \in \mathcal{D}$, leur intersection $P \cap P'$ est soit vide soit une face de P et P' .*

Donnée une décomposition élémentaire on note, pour $l \in \{0, 1\}$, $\mathcal{D}[l]$ l'ensemble des sous polytopes de dimension l dans cela.

*Un **poids** ω sur S muni d'une décomposition élémentaire \mathcal{D} est la donnée, pour tout point x de S tel que $\dim_x S = 1$, d'une application $\omega_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R}_+$ compatible avec la décomposition (au sense qu'elle provient d'une fonction $\mathcal{D}[1] \rightarrow \mathbb{R}_+$). Une fois muni d'un poids, S est dit **pondéré**.*

Vérifions qu'une telle décomposition existe toujours.

3.6 Lemme. *Soit S un polyèdre entier de dimension au plus 1. Il existe une décomposition élémentaire sur S .*

Démonstration. Soit en fait τ un atlas affinoïde. Construisons τ' en ajoutant, pour chaque polytope $P \in \tau$, tous les polytopes de la forme $P \cap P'$, $P' \in \tau$. Maintenant on a obtenu un atlas stable par intersection. Nous construisons alors τ'' comme la collection de tous les polytopes $P \in \tau'$ tels que

$$\forall P' \in \tau', [P \subset P' \text{ et } \dim P = \dim P'] \Rightarrow P = P'.$$

La décomposition élémentaire est obtenue en prenant τ'' et toutes faces des ses polytopes. □

Pentes

Dorenavant considérons S polyèdre entier de dimension au plus 1 et pondéré. Si $f \in A^0(S)$, nous définissons la **pente** de f en x , $\lambda_x(f)$, à partir d'un polytope de dimension 1 (i.e. un segment) fixé P . Fixons aussi arbitrairement x une de deux extrémités de P , et regardons l'unique fonction

$\Lambda(P) \ni t_x : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $t_x(x) = 0$ et dont l'image engendre le \mathbb{Z} -module $\Lambda(P)/\mathbb{R}$. Nous appelons $\lambda_{P,x} : \Lambda_{\mathbb{R}}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application lineaire que réalise l'égalité

$$f = f(x) + \lambda_{P,x}(f)t_x.$$

Elle dépend du choix de polytope P , mais c'est facile de voir ce qu'il passe en changeant le polytope considéré.

Soit en fait x' l'autre extrémité du polytope P . La fonction $t_x(x') - t_x \in \Lambda(P)$ coïncide avec t'_x , puisque satisfait les propriétés énoncés. Nous avons donc $t'_x = t_x(x') - t_x$, d'où découle, pour toute $f \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$, la relation

$$\lambda_x(f) + \lambda'_x(f) = 0.$$

Chaque point interne $y \in P$ peut être vu comme extrémité de deux sous-polytopes entiers P', P'' de P . À l'aide de la decomposition élémentaire $\mathcal{D} = \{x, y, x', P', P''\}$ n'est pas difficile de montrer la relation

$$\lambda_{P',y}(f) + \lambda_{P'',y}(f) = 0.$$

Nous sommes maintenant prêts pour généraliser la notion de pente à un polyèdre entier quelconque S . Bien sûr ce qui nous reste est de donner une bonne définition sur les points de "débranchement" puisque dans les autres cas. La définition que nous proposons s'applique bien à tout point non isolé de S : soit S un polyèdre entier pondéré, $x \in S$ tel que $\dim_x S = 1$ et $\{P_1, \dots, P_n\}$ une étoile de x dans S . Pour tout i l'application

$$A^0(S) \xrightarrow{\text{res}} A^0(P_i) \xrightarrow{\lambda_{P_i,x}} \mathbb{R}$$

dépend seulement du point t_i qui est l'autre extrémité de P_i . Nous notons cette composition λ_{x,t_i} .

Nous sommes maintenant capables de définir l'application \mathbb{R} -linéaire pente sur $A^0(S)$ par la formule

$$\lambda_x = \sum_{t_i \in T_x S} \omega_x(t_i) \lambda_{x,t_i}.$$

3.7 Définition. *Étant donné un polyèdre entier S et un point $x \in S$, une fonction affine par morceaux sur S est dite **harmonique en x** si $\lambda_x(h) = 0$. Pour tout sous-ensemble localement fini Γ de S , h est dite **harmonique sur $S - \Gamma$** si elle est harmonique en tout point de $S - \Gamma$. Le sous espace vectoriel de $A^0(S)$ des fonctions harmoniques sur $S - \Gamma$ est noté $H(S, \Gamma)$.*

La définition de fonction harmonique et la théorie classique motivent l'introduction d'un operateur "de Laplace" : notons $A^1(S)$ l'espace vectoriel des mesures réelles sur S dont le support est localement fini et δ_x la mesure de Dirac en x . L'application $dd^c : A^0(S) \rightarrow A^1(S)$ définie par

$$dd^c f := \sum_{x \in S} \lambda_x(f) \delta_x$$

est une application linéaire telle que,

$$h \in H(S, \Gamma) \iff \text{Supp}(dd^c h) \subset \Gamma.$$

3.2 Le faisceau des germes des fonctions harmoniques

Nous allons enfin construire, en utilisant les résultats précédents, les fonctions harmoniques sur une courbe strictement k -analytique lisse.

3.2.1 Fonctions “globalement” harmoniques : $H(\mathcal{X})$

3.2 Définition. Soit \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable. Le sous-espace vectoriel de $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$

$$H(\mathcal{X}) := \tau_{\mathcal{X}}^* H(S(\mathcal{X}), \partial\mathcal{X}_\eta)$$

est l'espace des fonctions globalement harmoniques sur la courbe.

Considérons le cas d'une S -courbe simplement semi-stable avec $|\mathcal{X}_\eta|$ compact. Alors nous avons une suite de résultats qui nous aident à montrer que ces fonctions ont le bon droit d'être appelés harmoniques et à les définir dans un contexte plus générale :

- Lorsque \mathcal{X}_s est une \tilde{k} -courbe propre, $H(\mathcal{X})$ est l'espace des fonctions réelles localement constantes sur \mathcal{X}_η ;
- Lorsque $\partial\mathcal{X}_\eta$ rencontre chaque composante connexe de $|\mathcal{X}_\eta|$, l'application de restriction

$$H(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}(\partial\mathcal{X}_\eta, \mathbb{R})$$

est en fait une bijection ;

- Soient $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ deux S -courbes simplement semi-stables et $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme quasi-fini. Alors $f^* : C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(|\mathcal{X}'_\eta|, \mathbb{R})$ envoie $H(\mathcal{X})$ dans $H(\mathcal{X}')$;
- Soient \mathcal{X} une courbe simplement semi-stable et K/k une extension non-archimédienne. Une fonction $h \in C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ appartient à $H(\mathcal{X})$ si et seulement si $p_K^* h \in H(\mathcal{X} \times_S \text{Spf}(K^o))$ où $p_K : \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ est induite par inclusion canonique.

3.2.2 Réduction semi-stable

Voici le théorème qui nous permet de généraliser les fonctions harmoniques aux courbes lisses : il est une version modifiée d'un résultat très classique :

3.9 Théorème (Réduction semi-stable). Soit X un espace strictement k -affinoïde purement de dimension 1 et rig-lisse. Il existe alors une extension finie séparable k'/k telle que le domaine k -affinoïde $X \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^o)$ -courbe simplement semi-stable.

Esquisse de preuve. Un résultat de M. Van der Put nous assure qu'après une convenable extension des scalaires sur une extension finie séparable k_1/k , X peut être identifiée à un domaine affinoïde de l'analytifié d'une courbe algébrique C propre et lisse sur k_1 . Maintenant le théorème de réduction semi-stable dans le contexte rigide établi par Bosch et Lütkebohmert dit que, avec une ultérieure extension des scalaires sur une extension finie séparable k'/k_1 la courbe C^{an} dévient isomorphe à la fibre générique d'une courbe formelle \mathcal{C} sur $\mathrm{Spf}(k'^o)$ simplement semi-stable.

Bien sûr k'/k est finie et séparable et $X \times_k k'$ peut être envisagé comme un domaine strictement k -affinoïde dans \mathcal{C}_η . À éclatement admissible (et à certaines réquêtes sur le bord) près, X' est donc isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^o)$ -courbe simplement semi-stable. \square

Voici donc, par le biais de cette réduction, qu'on a trouvé un préfaisceau en espaces vectoriels associé à $X \rightarrow H(X)$ dans la catégorie ayant par objets les espaces strictement k -affinoïdes purement de dimension 1 rig-lisses et par morphismes les immersions affinoïdes. Ce foncteur se généralise en un préfaisceau sur le site rigide X_R d'une courbe strictement k -analytique lisse X par la formule

$$H_X(V) := \varinjlim_W H(W)$$

où le système inductif (H est contravariant) filtrant associé à V est pris sur les domaines strictement k -affinoïdes de X contenus dans V . Il n'est pas un faisceau (considérer par exemple...) et nous verrons comme le faisceau y associé s'identifie au faisceau des fonctions lisses sur le site rigide.

Le faisceau \mathcal{H}_X

Nous sommes pourtant intéressés aux fonctions harmoniques pour la topologie : en utilisant le morphisme canonique des sites $\pi_X : X_R \rightarrow |X|$ nous notons \mathcal{H}_X le préfaisceau $\pi_{X*} H_X$. Observons que ses sections globales $\mathcal{H}_X(X)$ sont les fonctions de $C^0(|X|, \mathbb{R})$ dont la restriction à toute domaine strictement k -affinoïde Y est dans $H(Y)$.

La propriété plus remarquable de ce préfaisceau est que ses fonctions se recollent déjà bien : il est en fait un faisceau sur $|X|$.

3.2.3 Fonctions harmoniques et logarithmes des fonctions régulières

Nous avons dit que dans le cas complexe les fonctions harmoniques sont exactement les fonctions localement logarithmes de fonctions holomorphes.

Une inclusion marche encore dans le cas non-archimédien :

3.10 Proposition. Soit $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$, alors la fonction $\log |f| \in \mathcal{H}_X$.

Par contre n'est pas encore vrai que de cette façon on obtient une caractérisation des fonctions harmoniques : par exemple sur une courbe elliptique à mauvaise réduction, fibre générique du $\mathbb{C}[[t]]$ -schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathbb{C}[[t]][X, Y]/Y^2 - X(X - \lambda)(X - 1))$, on peut trouver des fonctions harmoniques en voisinage d'un point de type (2), qui ne peut pas être décrite comme logarithme de fonction régulière. L'énoncé générale est le suivante :

3.11 Théorème. Soit X une courbe strictement k -analytique lisse. Le faisceau \mathcal{F}_X de \mathbb{R} -espaces vectoriels engendré par $\log |f|$ où f est un germe de section de \mathcal{O}_X^\times est un sous-faisceau de \mathcal{H}_X . Ils coïncident si l'une de deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) le corps \tilde{k} est algébrique sur un corps fini ;
- ii) la courbe $X \widehat{\otimes}_k^{k^{alg}}$ est localement isomorphe à la droite projective analytique sur k^{alg} .

Le quotient $\mathcal{H}_X/\mathcal{F}_X$ est en générale un faisceau gratte-ciel sur $|X|$.

Démonstration. Sur les points de type (1), (4) et (3), les germes de fonctions coïncident. En fait on trouve dans les premiers deux cas un système des voisinages k -affinoïdes avec un seul point de Shilov et dans le troisième avec deux points. Nous pouvons donc, en travaillant explicitement sur les squelettes (que est un point dans le premiers cas et un segment dans le dernier), voir que les sections de \mathcal{H}_X et de \mathcal{F}_X coïncident en ces cas.

Pour ce qui concerne un point x de type (2), au contraire, la situation est plus compliquée et c'est ici qu'on devra découvrir les obstructions du théorème. Après une extension de scalaires finie galoisienne on peut étudier le cas d'une fibre générique d'une S -courbe simplement semi-stable, où le point x correspond à une composante irréductible propre et connexe de \mathcal{X}_s , dans la caractérisation du squelette comme graphe dual. Nous appellerons **courbe résiduelle** cette composante et nous la noterons C_x . Il faudra préciser, à ce point, que l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{X,x}/\mathcal{F}_{X,x}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Pic}^0(C_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (voir [Thu], pagg.58-59 pour la preuve complète).

À ce point la on comprend bien qu'il y a deux cas où cet espace vectoriel s'annule : quand le groupe de Picard est nul et quand il est de torsion. Cette dernière possibilité se vérifie dans le cas ii) et dans le cas i) nous sommes dans la première. \square

Remarquons que, même si pas facile à montrer, n'est pas mystérieuse cette relation avec le groupe de Picard de C_x : en fait à une fonction harmonique au voisinage de x correspond naturellement un diviseur de degré 0 sur C_x (les multiplicités des points correspondent aux pentes de la fonction sur le squelette) et à une fonction dans $\mathcal{F}_{X,x}$ correspond un diviseur (de degré 0) principale.

3.2.4 Ces fonctions sont vraiment "harmoniques"

Suivant la caractérisation axiomatique des fonctions harmoniques (voir 3.1.) montrons que \mathcal{H}_X est la bonne définition d'un faisceau de fonctions harmoniques.

3.12 Proposition (Principe du maximum). Soit Ω un ouvert de X , et $h \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H}_X)$. Elle admet un extremum local en $x \in \Omega$ si et seulement si elle est constante au voisinage de x .

Démonstration. Étant l'énoncé du principe du maximum de caractère locale, il ne faudra guère faire de plus que remonter au cas d'un squelette d'une courbe simplement semi-stable : supposons donc que h admet un extremum local en $x \in \Omega$ et considérons un voisinage strictement k -affinoïde Y de x tel que $h|_Y \in H(Y)$. Prenons ensuite k' extension finie galoisienne de k telle que $Y \otimes_k k' = \mathcal{Y}_\eta$ avec \mathcal{Y} $\text{Spf}(k'^o)$ -courbe simplement semi stable. Alors $h \otimes 1 = g \circ \tau_{\mathcal{Y}}$ avec opportune $g \in H(S(\mathcal{Y}), \Gamma(\mathcal{Y}_\eta))$. Le morphisme $\rho : Y \otimes_k k'$ est ouvert : ceci nous garantit que l'on peut vérifier la constance locale de $h \otimes 1$ sur un point de $p^{-1}(x)$. On s'est ramené à un cas connu : si $y \notin S(\mathcal{Y})$ cette propriété est trivialement vérifiée, dans le contraire elle découle du principe de maximum appliqué à la fonction g sur le polyèdre entier $S(\mathcal{Y})$. \square

3.13 Proposition (Principe de Harnack). Soient Ω un ouvert connexe de X et $\{\Omega_n\}$ une suite d'ouverts de X tels que chaque point de Ω admette un voisinage contenu dans Ω_n pour presque tous n . Alors quelle que soit la suite croissante de fonctions $h_n \in \Gamma(\Omega_n, \mathcal{H}_X)$ une de ces deux affirmations est vraie :

- soit (h_n) converge vers $+\infty$ uniformément sur tout compact dans Ω ;
- soit (h_n) converge vers une fonction harmonique h uniformément sur tout compact de Ω .

La résolution locale du problème de Dirichlet est conséquence de la théorie sur les polyèdres : puisque une courbe strictement k -analytique est un espace bon, il suffit de prendre pour chaque $x \in X$, un voisinage strictement k -affinoïde Y de x . Ensuite la réduction semi-stable nous permet d'utiliser la résolution du problème de Dirichlet pour une courbe simplement semi-stable (cfr. deuxième propriété dans [3.2.1]).

Pour satisfaire les axiomes des fonctions harmoniques, il faut que la résolution puisse être globale, l'énoncé étant le suivant :

3.14 Théorème (Resolubilité globale du problème de Dirichlet). Pour tout domaine k -affinoïde Y dans X , l'application de restriction

$$H(Y) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$$

est un isomorphisme.

Démontrer ce théorème est pas du tout facile : il faut utiliser une méthode dite “de Perron”, déjà classiquement utilisé pour résoudre le problème de Dirichlet sur régions pas bornés. Ceci relie sur la notion de fonction sous-harmonique, analogue à celle qu’on trouve dans le cas complexe.

3.15 Définition. Soit Ω un ouvert de X , courbe strictement k -analytique lisse. Une fonction $s : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est dite **sous-harmonique** si n’existe pas une composante connexe de X sur laquelle s est constante, si elle est semi-continue supérieurement et si elle satisfait la condition suivante : “pour tout domaine strictement k -affinoïde Y dans X et toute fonction $h \in H(Y)$, vaut l’implication $s|_{\partial Y} \leq h|_{\partial Y} \Rightarrow s \leq h$ sur Y ”.

Avec cette définition nous pouvons définir un faisceau de fonctions sous harmoniques sur $|X|$, noté \mathcal{SH}_X .

3.3 L’opérateur dd^c

Nous avons déjà défini un opérateur de Laplace pour les fonctions affines par morceaux sur un polyèdre entier. La généralisation à une courbe strictement k -analytique lisse semble nécessiter l’introduction d’une notion de fonction lisse : un analogue non archimédien de la notion de fonction indéfiniment différentiable.

3.3.1 Fonctions et formes lisses

Choisissons $\Omega \subset X$ un ouvert de la courbe est désignons par $I(X)$ l’ensemble des points de type (2) ou (3) de la courbe. Remarquons que cet ensemble satisfait la propriété : “toute partie finie de $I(X)$ est la réunion des bords de Shilov d’un nombre fini des domaines k -affinoïdes”.

3.16 Définition. Une fonction continue $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **fonction lisse** s’il existe un recouvrement localement fini $\mathcal{V} = \{V_i\}$ de Ω par des domaines k -affinoïdes tel que $\varphi|_{V_i} \in H(V_i)$. L’ensemble des fonctions lisses sur Ω , noté $\mathcal{A}^0(\Omega)$ est naturellement un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.

Les mesures réelles sur Ω dont le support est un ensemble localement fini de $I(\Omega)$ forment un espace vectoriel désigné par $\mathcal{A}^1(\Omega)$ dont les éléments sont appelés **formes lisses**.

Cette définition donne lieu naturellement à un faisceau sur $|X|$ des germes de fonctions lisses qui est un sous-faisceau du faisceau des germes de fonctions réelles continues sur X .

Fonctions lisses sur X_G et $|X|$

La définition d’un tel faisceau s’étend au site X_G : pour tout domaine k -analytique V , $\mathcal{A}^0(V)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(V, \mathbb{R})$ constitué

des fonctions φ satisfaisant la condition : “tout point $x \in V$ possède un voisinage k -affinoïde W tel que $\varphi|_W \in H(W)$ ”. Nous retrouvons la relation qu'on souhaite toujours entre les faisceaux décrivent les mêmes fonctions sur le G -site et sur le site canonique d'une courbe de Berkovich :

$$\mathcal{A}_X^0 = \pi_{X*} A_X^0.$$

Cette définition de fonction lisse sur X_G nous dit que $A^0(X)$ est, comme on a anticipé, le faisceau associé au préfaisceau H_X .

3.3.2 Ce qu'on voudrait appeler l'opérateur de Laplace : dd^c

En parallèle avec la théorie du potentiel sur \mathbb{C} nous voulons introduire l'analogie non archimédienne du laplacien $\partial\bar{\partial}/i\pi$. Le théorème ici nous en donne la bonne définition.

3.17 Théorème. Soit X une courbe strictement K -analytique lisse, K/k extension complète d'un corps ultramétrique complet. Il existe un unique morphisme de faisceaux $dd^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^1$ qui satisfasse les conditions :

- Quelles que soient l'extension non archimédienne K'/K donnent lieu à la projection $p_{K'/K} : X \widehat{\otimes}_K K' \rightarrow X$ et la section φ de \mathcal{A}_X^0 sur un ouvert $\Omega \subset X$,

$$dd^c(\varphi) = (p_{K'/K})_* dd^c p_{K'/K}^* \varphi;$$

- Quels que soient la S -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} , $\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}))$ et l'isomorphisme sur un domaine K -analytique compact $j : \mathcal{Y}_\eta \xrightarrow{\sim} Y$, vaut la formule

$$dd^c(\Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}) = j_* dd^c \Phi$$

dans $\Gamma(Y - \partial Y, \mathcal{A}_Y^1)$.

Cet opérateur jouisse de certains propriétés qui éclaircissent la relation entre le faisceau des fonctions lisses et le contexte dans lequel nous avons travaillé jusqu'à maintenant :

3.18 Proposition. Dans les hypothèses du théorème précédent, nous avons les propriétés suivantes

- i) Le noyau de dd^c est le faisceau \mathcal{H}_X ;
- ii) Pour tout point $x \in I(X)$ et tout germe en x , φ , du faisceau \mathcal{A}_X^0 qui admet un minimum local strict la mesure obtenue est strictement positive :

$$\int_{\{x\}} dd^c \varphi > 0;$$

- iii) Soit Ω un ouvert de X . Appelés $A_c^0(\Omega)$ et $A_c^1(\Omega)$ les espaces vectoriels de fonctions et formes lisses à support compact sur Ω , l'application dd^c envoie $A_c^0(\Omega)$ dans $A_c^1(\Omega)$;

iv) Pour toutes fonctions lisses $\varphi_1 \in A_c^0(\Omega)$ et $\varphi_2 \in A^0(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \varphi_1 dd^c \varphi_2 = \int_{\Omega} \varphi_2 dd^c \varphi_1.$$

Mentionnons aussi que, en présence d'un morphisme de courbes strictement k -analytiques lisses $p : Y \rightarrow X$, l'opérateur dd^c respecte la functorialité des images directe et inverse le long p des faisceaux $X \rightarrow \mathcal{A}_X^0$ et $X \rightarrow \mathcal{A}_X^1$ (mais nous nous n'arrêtons pas sur les définitions de ceux-ci).

L'étude de l'analogie complexe de cet opérateur est à la base de la définition d'une variété arithmétique au sens d'Arakelov. Pour justifier cette affirmation nous avons besoin de la définition de courant, expliquée dans le prochain chapitre.

Chapitre 4

Applications à la théorie de l'intersection arithmétique

I'm fixing a hole where the rain
gets in, and stops my mind from
wandering where it will go...

(The Beatles, "Fixing a hole")

La géométrie d'Arakelov est un instrument qui permet d'étudier les schémas arithmétiques en compactifiant $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ où K est un corps de nombres. C'est à dire qu'on rajoute un point "complexe" à l'infini et par conséquent on obtient une surface de Riemann à compactifier le schéma arithmétique considéré. En suite on muni tous les fibrés arithmétiques du schéma avec une métrique hermitienne sur la partie complexe. Ce que Amaury Thuillier [Thu] a construit dans sa thèse est un contexte plus homogène pour cette théorie : en utilisant la théorie du potentiel sur les places non-archimédiennes développé tout à l'heure il peut "métriser" aussi les faisceaux sur celles-la et ainsi préciser la notion de diviseur d'Arakelov sur une courbe algébrique propre et lisse sur \mathbb{Q} .

4.1 Théorie d'Arakelov classique

Compactifier le spectre d'un anneau des entiers. Pourquoi ? Les motivations à la base de ce choix dérivent du fait qu'on a à disposition une théorie très puissante des variétés projectives (sur un corps algébriquement clos) notamment avec la bonne définition de diviseur d'une fonction rationnelle et du degré qui préparent la voie à nombreuses applications comme, dans le cas des courbes, l'introduction du groupe de Picard et le théorème de Riemann-Roch.

Le but de la géométrie d'Arakelov est de fournir un analogue arithmétique de

ces objets : ceci est fait en introduisant les conceptions analogues de diviseur, de degré et de compactification de façon telle que le diviseur d'une fonction rationnelle soit 0. Par exemple un diviseur d'Arakelov sur l'ensemble B des places d'un anneau d'entiers d'un corps de nombres \mathcal{O}_K est donné classiquement comme une combinaison linéaire finie $D = \sum_P n_P P + \sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma$ où P sont les places non-archimédiennes et σ les archimédiennes dans B .

Le pas ultérieure dans ce nouveau contexte a été l'introduction d'une théorie de l'intersection des arithmétique par S.Y. Arakelov. L'exemple fondamental est le cas d'une fibration en courbes $\mathcal{X} \rightarrow B$ dans laquelle nous considérons l'intersection de deux sections P et Q . La contribution sur les places finies de cette intersection est calculée de façon "traditionnelle" autant que sur les places infinies elle est calculée à l'aide des logarithmes de fonctions appelés de Arakelov-Green qui naïvement peuvent être considérés comme des distances sur la variété complexe X_σ .

Le fait que l'intersection soit considéré de façon différente suivent le caractère de finitude des places c'est ce qui nous fait appeler la théorie introduite par Thuillier "uniforme". Elle partage pourtant avec la théorie classique "irrégulière" la plupart du procédé de métrisation des faisceaux inversibles : étude de l'opérateur de Laplace, définition de fonctions lisses, courants de Green et groupes de classes.

Courants et cycles d'intersection

La théorie des courants a été introduite par DeRham pour avoir un formalisme comprenant soit cycles que formes lisses : soit $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ l'espace des q -formes C^∞ sur \mathbb{R}^n ayant support compact. La topologie de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ peut être utilisée composante par composante pour donner à $A_c^q(\mathbb{R}^n)$ une structure d'espace topologique complet.

4.1 Définition. *Le dual topologique de $A_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$ est appelé espace des **courants** de degré q et il est noté $D^q(\mathbb{R}^n)$.*

En établissant une théorie d'intersection arithmétique cette notion est fondamentale puisque un **cycle arithmétique** sur X est défini comme une couple (Z, g) consistant d'un cycle algébrique Z et d'une courante de Green pour Z donc une courant sur la variété complexe X_∞ qui satisfasse l'équation

$$dd^c g + \delta_Z = \omega$$

avec ω forme lisse. Les classes de cycles arithmétiques suivant une convenable notion d'équivalence linéaire sont appelés **groupes de Chow arithmétiques** et notés $\widehat{CH}^o(X)$.

Produits d'intersection

Ces groupes, dont la dénomination vient de la théorie de l'intersection des variétés sur un corps, sont muni d'une structure de produit et de pro-

priétés fonctorielles tout à fait analogues au cas classique. La théorie d'Arakelov nous permet de définir un accouplement d'intersection entre diviseurs d'Arakelov qui se comporte bien par rapport à l'équivalence linéaire : le résultat principal est donc l'existence d'un accouplement d'intersection de la forme

$$\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{CH}^{d-p+1}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^1(Y)$$

par rapport à une application $f : X \rightarrow Y$ de dimension relative d .

Les accouplements sur les groupes de Chow d'une compactification d'une variété arithmétique sont induits par cet accouplement ci-dessus. Il a été montré par Gillet et Soulé dans [GS] que à isomorphisme près, ces groupes ne dépendent pas de la métrique Kählerienne qu'on a mis sur X .

4.2 Théorie d'Arakelov "uniforme"

Commençons en établissant l'endroit où on va définir cette théorie avec un certain nombre de définitions. Dans ce qui suit nous allons considérer une courbe algébrique X propre et lisse sur \mathbb{Q} . La place archimédienne de \mathbb{Q} est notée ∞ et les places non-archimédiennes sont identifiées aux nombres premiers. L'ensemble des places de \mathbb{Q} est notée $B(\mathbb{Q})$. Pour toute place finie $v \in B(\mathbb{Q})$, X_v désigne l'espace \mathbb{Q}_v -analytique analytifié de la \mathbb{Q}_v -courbe algébrique $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v$ en tant que l'espace X_∞ est toujours envisagé comme la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$ munie de la conjugaison complexe F_∞ .

Une courbe au-dessus d'un ouvert nonvide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un schéma de type fini, séparé et plat sur U dont les fibres sont purement de dimension 1. Étant donnée une courbe \mathcal{X} sur un ouvert nonvide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et une place $v \in B(\mathbb{Q})$ associée à un point fermé $s(v)$ dans U , \mathcal{X}_v désignera la $\text{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -courbe formelle obtenue par completion de \mathcal{X} le long de sa fibre au-dessus de $s(v)$. La fibre spéciale de \mathcal{X}_v est la $\kappa(s(v))$ -courbe $\mathcal{X}_{s(v)}$. Pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} et toute place $v \in B(\mathbb{Q})$ nous notons $\mathcal{F}_v := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_v}$. Enfin nous écrirons $A^0(X_\infty)$ pour l'espace vectoriel des fonctions complexes de classes C^∞ sur X_∞ qui sont invariantes par action de F_∞ et $A^1(X_\infty)$ pour l'espace vectoriel des 2-formes différentielles sur X_∞ invariants pour l'action de F_∞ et s'écrivent localement

$$\varphi \frac{i}{\pi} dz \wedge d\bar{z}$$

où z est une coordonnée locale sur X_∞ et φ une fonction réelle de classe C^∞ . L'opérateur de Laplace est défini de façon classique

$$dd^c := \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial}$$

et envoie $A^0(X_\infty)$ dans $A^1(X_\infty)$. Pour définir les diviseurs d'Arakelov nous aurons besoin de définir un espace des courants.

4.2.1 Courants

Les courants sont des fonctionnels qui sont naturellement associés aux espaces de fonctions lisses et par conséquent à l'opérateur de Laplace dd^c .

4.2 Définition. Soit Ω ouvert dans X . Les courants de degré 0 sont les éléments de l'espace $D^0(\Omega)$, dual de $A_c^1(\Omega)$. Les courants de degré 1 sont ceux de l'espace $D^1(\Omega)$ dual de $A_c^0(\Omega)$.

Remarque. Suivant la définition classique on aurait dû définir une topologie sur $A_c^i(\Omega)$ et introduire les courants comme dual topologique. Les topologies naturelles introduites par Thuillier sont pourtant assez fines pour faire coïncider le dual topologique avec le dual algébrique (c'est à dire que chaque fonction linéaire $A_c^i(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue). En tout cas il ne faudrait pas oublier que les espaces de courants sont munis d'une topologie par laquelle il sont localement convexes : par exemple le fait que l'opérateur de Laplace induit par dualité $dd^{c*} : D^0(\Omega) \rightarrow D^1(\Omega)$ est continue est souvent utilisé.

Formule de Poincaré-Lelong

Un exemple d'utilisation de l'opérateur dd^c au sens des courants est la formule de Poincaré-Lelong : dans le cas de la géométrie complexe elle consiste dans l'affirmation que, donnée une fonction holomorphe f sur une variété complexe (pour $n=1$ une surface de Riemann) M et un diviseur défini par f qui est une hypersurface analytique Z (si $n=1$, un ensemble localement fini de points), alors vaut la formule

$$T_Z = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \log |f|$$

où T_Z est la courant positive fermé définie par la fonction

$$\begin{array}{ccc} A_c^{n-1}(M) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_Z \varphi \end{array}$$

Nous avons maintenant beaucoup d'instruments pour établir une formule analogue sur une courbe strictement k -analytique lisse X : il vaut la peine de terminer le travail.

Notons X_0 l'ensemble des points rigides $x \in X$ (tels que $[\mathcal{H}(x) : k] < \infty$). Nous définissons le groupe des **0-cycles** sur X comme le sous groupe $Z_0(X)$ du groupe abélien $\text{Hom}(X_0, \mathbb{Z})$ constitué des fonctions à support localement fini. Suivant la notation classique écrivons le 0-cycle $\{x \mapsto n_x\}_{x \in X_0}$ comme somme formelle :

$$\sum_{x \in X_0} n_x [x].$$

À chaque $x \in X_0$ est associée une mesure $\delta_{[x]} = [\kappa(x) : k] \delta_x$ qui induit pour linéarité une application qui à chaque 0-cycle $D \in Z_0(X)$ associe δ_D . Cette

courant, si D est à support fini, satisfait la condition

$$\deg(D) = \int_X 1\delta_D.$$

Prenons une fonction méromorphe régulière f sur X et appliquons à celle-ci nôtres constructions : les points $x \in X$ tels que $f(x) = 0$ ou $f^{-1}(x) = 0$ forment un sous-ensemble localement fini de X et sont tous dans X_0 . Puisque X est supposée lisse, le diviseur de f (dans le sens du 0-cycle y canoniquement associé) est l'élément de $Z_0(X)$ défini par :

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{x \in X_0} \operatorname{ord}_x(f)[x].$$

La formule de Poincaré-Lelong peut maintenant être énoncée :

4.3 Théorème. Quelle que soit la fonction méromorphe régulière f sur X , le courant $\log |f|$ satisfait à l'équation

$$dd^c \log |f| = \delta_{\operatorname{div}(f)}.$$

4.2.2 Diviseurs d'Arakelov

Dans le contexte présenté au début du chapitre nous définissons un diviseur d'Arakelov de façon uniforme :

4.4 Définition. Soit D un diviseur sur X . Une **fonction de Green lisse** sur D est définie comme une famille $g = (g_v)$ indexé sur les places de \mathbb{Q} , qui satisfait les deux conditions :

- i) pour toute place $v \in M(\mathbb{Q})$, la mesure $\mu := dd^c g_v + \delta_{\operatorname{pr}_v^* D}$ est une forme lisse sur X_v ;
- ii) il existe une courbe algébrique propre \mathcal{X} sur un ouvert U de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ telle que pour toute place v de \mathbb{Q} correspondent à un point fermé de U , le support de μ soit contenu dans $\Gamma(\mathcal{X}_v)$ et $g_v|_{\Gamma(\mathcal{X}_v)} = 0$.

Les couples de la forme (g, D) où D est un diviseur sur X et g est une fonction de Green lisse pour D sont appelés **diviseurs d'Arakelov lisses**.

L'ensemble de ces diviseurs a une structure de groupe donné "composante par composante" dans le sens que $(g, D) + (g', D') = (g + g', D + D')$ et que l'élément neutre est le couple $(0, 0)$. Ce groupe est noté $\widehat{Z}^1(X; A^0)$. À partir de ceux-ci, par la définition d'une équivalence linéaire nous allons obtenir des groupes de classes de Diviseurs d'Arakelov, quotients de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ par un convenable sous-groupe.

4.5 Définition. Est appelé groupe des **diviseurs principaux**, le sous-groupe de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ engendré par les diviseurs provenant par fonctions de

la forme $\log |f|$ avec $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times)$ fonction méromorphe génériquement inversible et par fonctions appartenant à

$$H(X) := \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} \Gamma(X_v, \mathcal{H}_{X_v}).$$

Le groupe de ces diviseurs se note $\widehat{Pr}(X)$.

Le groupe quotient $\widehat{Z}^1(X; A^0)/\widehat{Pr}(X) =: \widehat{CH}^1(X; A^0)$ est l'analogue du groupe de Chow arithmétique.

On devrait maintenant définir des produits d'intersection analogues à ceux décrits au début de chapitre. Faire ceci pourtant n'est pas immédiat et demande l'introduction d'un sous-espace de courants de degré 0 appelé $W^1(X)$. Nous renvoyons donc à [Thu, Sect. 4.1] pour les détails.

4.2.3 Métriques lisses sur faisceaux inversibles

Terminons enfin la description de cette géométrie d'Arakelov uniforme en montrant ce que est un faisceau inversible métrisé en ce nouveau contexte. Commençons par décrire la situation locale sur les places et ensuite en la globalisant.

Niveau locale

Soient $v \in M(\mathbb{Q})$ et L un faisceau inversible sur X_v . Une **métrique lisse** sur L est la donnée, pour tout ouvert U dans X_v et toute section inversible $s \in L$ d'une fonction lisse que sera notée $-\log \|s\| \in A^0(U)$ qui vérifie une condition de compatibilité : pour toutes sections inversibles s, s' de L sur des ouverts U, U' de X_v , la fonction $f \in \Gamma(U \cap U', \mathcal{O}_{X_v}^\times)$ telle que $s'|_{U \cap U'} = fs|_{U \cap U'}$ satisfait la formule

$$-\log \|s'\|_{|U \cap U'} = -\log \|s\|_{|U \cap U'} - \log |f|_v.$$

Le **produit** de deux faisceaux inversibles métrisés $(L, \|\cdot\|)$ et $(L', \|\cdot\|')$ sur X_v est le faisceau inversible métrisé $(L \otimes L', \|\cdot\|'')$ tel que, si s, s' sont des sections de L et L' respectivement, alors

$$-\log \|s \otimes s'\|'' = -\log \|s\| - \log \|s'\|.$$

L'**inverse** d'un faisceau inversible métrisé $(L, \|\cdot\|)$ sur X_v est le faisceau inversible métrisé $(L^{\otimes(-1)}, \|\cdot\|')$ tel que, pour toute section $s \in L$ on ait

$$-\log \|s^{\otimes(-1)}\|' = \log \|s\|.$$

Le groupe abélien si obtenu est noté $\text{Pic}(X; A^0)$. Il s'insère dans une suite exacte longue

$$0 \rightarrow \Gamma(X_v, \mathcal{O}_{X_v}^\times)(1) \rightarrow \Gamma(X_v, \mathcal{O}_{X_v}^\times) \rightarrow A^0(X_v) \rightarrow \text{Pic}(X_v; A^0) \rightarrow \text{Pic}(X_v) \rightarrow 0.$$

Niveau globale

Nous sommes maintenant prêts pour définir globalement une métrique lisse sur un faisceau inversible sur X .

On définit une **métrique lisse** sur L comme la donnée d'une famille $(\|\cdot\|_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ de métriques lisses sur les faisceaux L_v qui satisfait à une condition "adélique" : il existe une courbe propre \mathcal{X} sur un ouvert non-vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et un faisceau inversible \mathcal{L} sur \mathcal{X} qui prolonge L , tels que

$$\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_v}$$

pour toute place non-archimédienne v de \mathbb{Q} qui correspond à un point fermé de U . L'ensemble des classes d'isométrie de faisceaux inversibles métrisés est naturellement muni d'une structure de groupe abélien et noté $\widehat{\text{Pic}}(X; A^0)$. Nous avons une suite exacte courte de groupes abéliens de la forme

$$0 \rightarrow A^0(X) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}(X; A^0) \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0.$$

où $A^0(X) = \bigoplus_v (A^0(X_v))$.

Bibliographie

- [AG] David H.Armitage, Stephen J. Gardiner. *Classical Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [Ber1] V.G.Berkovich. *Spectral Theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, **33**, Americal Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber2] V.G.Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, *Publ. Math. IHÉS*, **78** (1993), pp.5-161.
- [BGR] S.Bosch, U.Güntzer, R.Remmert. *Non-Archimedean Analysis. A systematic approach to Rigid Analytic Geometry*, Grundlehren der Matematischen Wissenschaften **261**, Springer-Verlag, 1984.
- [BL] S.Bosch, W.Lütkebohmert. Stable reduction and uniformization of abelian varieties. *Mathematische Annalen*, **270** (1985) pp.349-379.
- [Bos] Siegfried Bosch. Lectures on Formal and Rigid Geometry. 2008.
- [Con] Brian Conrad. Several approaches to non-Archimedean geometry. In *p-adic geometry*, Univ. Lecture Series, **45** pages 9-63. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Duc] Antoine Ducros. Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich. *Astérisque* **311** :Exp. No. 958, viii, 137-176, 2007. Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/2006.
- [GS] H.Gillet, C.Soulé. Arithmetic intersection theory, *Publ. Math. IHÉS* **72** (1990), pp. 94–174.
- [Ray] M.Raynaud. Géométrie analytique rigide d’après Tate, Kiehl, ..., in *Table ronde d’analyse non-archimédienne*, *Bulletin de la société mathématique de France*, Mémoire **39**, **40** (1974).
- [SGAIV] M.Artin, A.Grothendieck, J-L.Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1972–73.

- [Thu] A.Thuillier. *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non-archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov*. Thèse présentée pour obtenir le grade de “docteur de l'Université de Rennes 1”, 2005. Texte disponible sur la page <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/04/87/50/PDF/tel-00010990.pdf>
- [Poi] J.Poineau. *La droite de Berkovich sur \mathbb{Z}* . Astérisque **334**, 2010.
- [Vis] A.Vistoli. *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory.*, in B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry : Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Surveys and Monographs 123, A.M.S., Providence RI, 2006.